目录

第二章 一维随机变量及其分布

2.1 随机变量

随机变量

随机试验的结果通常可以用数量来表示：

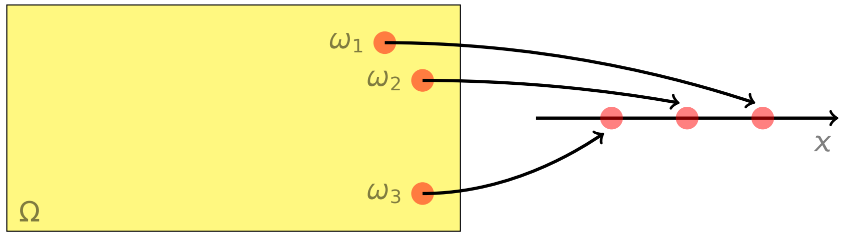
- 扔一个硬币所得的结果；
- 掷一颗骰子所得的点数；
- 抽查样品时的废品个数；
- 广州每日的平均气温；
- 某电子管的使用寿命；

将试验结果数值化, 就产生了随机变量的概念.

随机变量

定义 **1.** 设 $X = X(\omega)$ 是定义在样本空间 Ω 上的实值函数, 称 $X = X(\omega)$ 为随机变量.

下图给出样本点 ω 与实数 $X = X(\omega)$ 对应的示意图.



随机变量一般用大写英文字母 X、Y、Z 或小写希腊字母 ξ、η、γ 来表示.

随机变量

对实验结果 ω 本身就是一个数的随机试验, 令

$$X = X(\omega) = \omega,$$

则 X 就是一个随机变量. 随机变量举例:

1. 电视机的寿命 T.
2. 掷一颗骰子, 出现的点数 X.
3. 每天进入某超市的顾客数 Y.
4. $\cdots$

随机变量

对于样本点本身不是数的随机试验, 这时可根据需要设计随机变量.

例 **1.** 检查一个产品, 只考察其合格与否, 则其样本空间为 $\Omega = \{$合格产品, 不合格产品$\}$. 这时可以设计一个随机变量 X 如下

$$X = \begin{cases} 1, & \omega = \text{合格产品}; \\ 0, & \omega = \text{不合格产品}. \end{cases}$$

样本点 ω	HH	HT	TH	TT
X	2	1	1	0

随机变量

例 **2.** 将一枚硬币抛掷两次, 感兴趣的是投掷中出现 H 的总次数, 而对出现 H,T 出现的顺序不关心. 例如, 我们只关心出现 H 的总次数是 1, 而不在乎出现的是“HT”还是“TH”. 以 X 表示两次投掷出现 H 的总次数, 对于样本空间 $\Omega\{\omega\}=\{HH,HT,TH,TT\}$ 中的每一个样本点, X 都有一个值与之对应, 即有 这样设计出来的 X 也是一个随机变量.

随机变量

随机变量的取值随试验的结果而定, 而试验的各个结果出现有一定的概率, 因而随机变量的取值有一定的概率.

例如, 在例 2 中, X 的取值为 1, 记为 $\{X=1\}$, 对应的样本点的集合为 $A=\{HT,TH\}$, 这是一个事件, 事件 A 发生当且仅当 $\{X=1\}$ 发生. 因此，我们可以将事件 $A=\{HT,TH\}$ 说成事件 $\{X=1\}$. 我们称概率 $P(A)=P\{HT,TH\}$ 为 $\{X=1\}$ 的概率, 即

$$P\{X=1\}=P(A)=\frac{1}{2}.$$

随机变量

一般地, 若 I 是一个实数集, $\{X\in I\}$ 记为事件 B, 即

$$B=\{\omega|X(\omega)\in I\},$$

则

$$P\{X\in I\}=P(B)=P\{\omega|X(\omega)\in I\}.$$

按照随机变量可能取值的情况, 可以把它们分为两类：离散型随机变量和非离散型随机变量, 而非离散型随机变量中最重要的是连续型随机变量. 本章主要研究离散型及连续型随机变量.

X	x_1	$x_2,$	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	$p_2,$	$\cdots$	p_n	$\cdots$

2.2　离散型随机变量

离散型随机变量

定义 **1.** 如果随机变量的全部可能取的值只有有限个或可列无限多个, 则称这种随机变量为离散型随机变量.

一般地, 设离散型随机变量 X 所有可能取的值为 x_k $(k=1,2,\dots)$, X 取各个可能值的概率, 即事件 $\{X=x_k\}$ 的概率为

$$P\{X=x_k\}=p_k,\ k=1,2,\dots, \tag{1}$$

称 (1) 式为离散型随机变量 X 的分布律或概率分布.

离散型随机变量

分布律也可以用下面的表格来表示:

由概率的定义, 式 p_k 应满足以下条件:

1. $p_k \geq 0, k=1,2\dots;$
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$

离散型随机变量

例 **1.** 某系统有两台机器相互独立地运转. 设第一台与第二台机器发生故障的概率分别为 0.1, 0.2, 以 X 表示系统中发生故障的机器数, 求 X 的分布律.

分析: 求分布律需要求事件 $\{X = x_k\}$ 的概率

$$P\{X = X_k\} = p_k,\ k = 1, 2, \ldots,$$

离散型随机变量

解. 设 A_i 表示事件“第 i 台机器发生故障”, $i = 1, 2.$ 则

$$P\{X = 0\} = P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\right) = 0.9 \times 0.8 = 0.72$$

$$P\{X = 1\} = P\left(A_1\overline{A}_2\right) + P\left(\overline{A}_1A_2\right)$$

$$= 0.1 \times 0.8 + 0.9 \times 0.2 = 0.26$$

$$P\{X = 2\} = P(A_1A_2) = 0.1 \times 0.2 = 0.02$$

故所求概率分布为:

X	0	1	2
p_k	0.72	0.26	0.02

2.2.1 (0 − 1) 分布

(0 − 1) 分布

设随机变量 X 只可能取 0 与 1 两个值, 它的分布律是

$$P\{X = k\} = p^k q^{1-k}, k = 0, 1, p + q = 1 (0 < p < 1)$$

则称 X 服从 (0 − 1) 分布或两点分布. (0 − 1) 分布的分布律也可写成

X	0	1
p_k	q	p

例子. 抛一枚硬币，观察出现正面 H 还是反面 T，正面 $X = 0$, 反面 $X = 1$

(0 − 1) 分布

对于一个随机试验, 如果它的样本空间只包含两个元素, 即 ω_1, ω_2 我们总能在 Ω 上定义一个服从 $(0-1)$ 分布的随机变量

$$X = \begin{cases} 0, & \omega = \omega_1; \\ 1, & \omega = \omega_2. \end{cases}$$

来描述这个随机试验的结果.

检查产品的质量是否合格, 对新生婴儿的性别进行登记, 检验种子是否发芽以及前面多次讨论过的“抛硬币”试验都可以用 $(0-1)$ 分布的随机变量来描述.

2.2.2 伯努力试验与二项分布

伯努力试验

设试验 E 只有两个可能结果：A 及 $\overline{A}$, 则称为伯努利 (Bernoulli) 试验. 设 $P(A) = p$, $0 < p < 1$, 则 $P(\overline{A}) = 1 - p$.

将伯努力试验独立重复地进行 n 次, 则称这一串重复的独立试验为 n 重伯努利试验.

伯努利试验的特点：

1. 独立: 各次的的试验结果互不影响.
2. 重复: 每次试验中 $P(A) = p$ 保持不变.

伯努力试验

定理 (伯努利定理). 设一次试验中事件 A 发生的概率为 $p(0 < p < 1)$, 则 n 重伯努利试验中, 事件 A 恰好发生 $k(0 \leq k \leq n)$ 次的概率为

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

证明. 记 n 重伯努力试验中事件 A 正好出现 k 次这一事件为 B_k, 以 A_i 表示第 i 次试验中出现事件 A, 以 $\overline{A}_i$ 表示第 i 次试验中出现 $\overline{A}$, 则

$$B_k = A_1A_2\cdots A_k\overline{A}_{k+1}\cdots\overline{A}_n \cup \cdots \cup \overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{n-k}A_{n-k+1}\cdots A_n$$

右边的每一项表示某 k 次试验出现事件 A, 另外 $n-k$ 次试验出现 $\overline{A}$, 这种项共有 C_n^k 个, 而且两两互不相容.

伯努力试验

由试验的独立性得

$$\begin{aligned}
&P\left(A_1A_2\cdots A_k\overline{A}_{k+1}\cdots\overline{A}_n\right)\\
&= P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_k)P\left(\overline{A}_{k+1}\right)\cdots P\left(\overline{A}_n\right)\\
&= p^k(1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

同理可得, 右边各项所对应的概率均为 $p^k(1-p)^{n-k}$, 利用概率的加法定理知

$$P(B_k) = C_n^k p^k(1-p)^{n-k}.$$

二项分布

在 n 重伯努力试验中, 若以 X 表示 n 重伯努力试验中事件 A 出现的次数, 显然有

$$P\{X=k\} = P(B_k) = C_n^k p^k(1-p)^{n-k}.$$

定义. 如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\} = C_n^k p^k(1-p)^{n-k},$$

其中 $0<p<1$, $0\le k\le n$, 则称 X 服从参数为 n, p 的二项分布, 记为 $X\sim B(n,p)$.

小注: 非负性显然, 规范性由二项式定理可得, 即 $\sum_{k=0}^{n} P\{X=k\} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k(1-p)^{n-k} = (p+1-p)^n = 1$

k	$P\{X=k\}$	k	$P\{X=k\}$
0	0.012	6	0.1
1	0.058	7	0.055
2	0.137	8	0.022
3	0.205	9	0.007
4	0.218	10	0.002
5	0.175	≥ 11	< 0.001

二项分布

例 **2.** 已知某类产品的次品率为 0.2, 现从一大批这类产品中随机地抽查 20 件, 问恰好有 $k(k=0,1,2,,20)$ 件次品的概率是多少?

小注: 在物品总数很大, 而抽取数目较小时, 不放回抽样可以看成放回抽样, 从而可按伯努利试验来处理.

解. 我们将检查一件产品是否为次品看成是一次试验, 检查 20 件产品相当于做 20 重伯努利试验. 以 X 记抽出的 20 件产品中次品的件数, 那么 X 是一个随机变量, 且 $X \sim b(20,0.2)$, 则所求的概率为

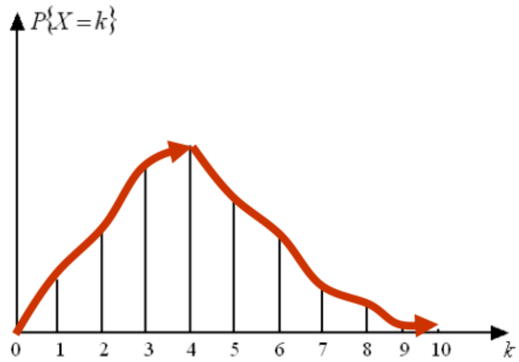
$$P\{X=k\}=C_{20}^{k}(0.2)^{k}(0.8)^{20-k}, k=0,1,\cdots,20.$$

二项分布

二项分布

作出上表的图形, 如下图所示

从上图可以看出, 概率 $P\{X=k\}$ 先是随着 k 增加而增加, 直至达到最大值 $(k=4)$, 随后单调减少. 一般地, 对于固定的 n 及 p, 二项分布 $b(n,p)$ 都有类似的结果



二项分布

例 **3.** 设某种鸭在正常情况下感染某种传染病的概率为 20%. 现新发明两种疫苗, 疫苗 A 注射到 9 只健康鸭后无一只感染传染病, 疫苗 B 注射到 25 只鸭后仅有一只感染, 试问应如何评价这两种疫苗, 能否初步估计哪种疫苗较为有效？

二项分布

解**.** 若疫苗 A 完全无效, 则注射后鸭受感染的概率仍为 0.2, 故 9 只鸭中无一只感染的概率为

$$0.8^9 = 0.1342.$$

同理, 若疫苗 B 完全无效, 则 25 只鸭中至多有一只感染的概率为

$$0.8^{25} + C_{25}^1(0.2)^1(0.8)^{24} = 0.0274.$$

若 B 完全无效, 则 25 只健康鸭至多有一只感染的概率只有 0.0274, 由实际推断原理, 小概率事件在一次试验中实际上几乎是不发生的, 但现在却发生了, 有理由怀疑假设的正确性. 因此可以初步认为疫苗 B 是有效的, 且比 A 有效 (因为 0.0274 比 0.1342 小的多).

2.2.3 泊松分布

泊松分布

设随机变量 X 所有可能取值为 $0,1,2,\ldots,$ 而取各个值的概率为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},\ k=0,1,2\cdots$$

其中 $\lambda>0$ 为常数, 则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 记为 $X\sim\pi(\lambda)$.

显然, $P\{X=k\}\geq 0,\ k=0,1,2\cdots$, 且

$$\sum_{k=0}^{\infty}P\{X=k\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k\mathrm{e}^{-\lambda}}{k!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\mathrm{e}^{\lambda}=1.$$

即 $P\{X=k\}$ 满足分布律的两个条件.

泊松分布的应用

泊松分布常与单位时间（或单位面积、单位产品等）上的计数过程相联系：

- 某地区每天发生火灾的次数.
- 某地区每年发生暴雨的次数.
- 某种玻璃每平方米内的气泡数.
- 某医院每天前来就诊的人数.
- 某份杂志各期的错别字数目.

泊松分布

例 **4.** 商店的历史销售记录表明, 某种商品每月的销售量服从参数为 $\lambda=10$ 的泊松分布. 为了以 95% 以上的概率保证该商品不脱销, 问商店在月底至少应进该商品多少件?

泊松分布

解. 设商店每月销售这种商品 X 件, 月底的进货量为 n 件, 按题意要求为

$$P\{X \leq n\} \geq 0.95,$$

X 服从 $\lambda = 10$ 的泊松分布, 则有 $\sum_{k=0}^{n} \frac{10^k}{k!} e^{-10} \geq 0.95$. 由附录的泊松分布表知

λ	x									
	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
7.6	0.854	0.915	0.954	0.976	0.989	0.995	0.998	0.999	1.000	
7.8	0.835	0.902	0.945	0.971	0.986	0.993	0.997	0.999	1.000	
8.0	0.816	0.888	0.936	0.966	0.983	0.992	0.996	0.998	0.999	1.000
8.5	0.763	0.849	0.909	0.949	0.973	0.986	0.993	0.997	0.999	0.999
9.0	0.706	0.803	0.876	0.926	0.959	0.978	0.989	0.995	0.998	0.999
9.5	0.645	0.752	0.836	0.898	0.940	0.967	0.982	0.991	0.996	0.998
10.0	0.583	0.697	0.792	0.864	0.917	0.951	0.973	0.986	0.993	0.997

$$\sum_{k=0}^{14} \frac{10^k}{k!} \mathrm{e}^{-10} = 0.917 < 0.95$$

$$\sum_{k=0}^{15} \frac{10^k}{k!} \mathrm{e}^{-10} = 0.951 > 0.95$$

只要在月底进货 15 件 (假定上个月没有存货), 就可以 95% 的概率保证这种商品在下个月内不会脱销.

二项分布的泊松近似

定理 (泊松定理). 在 n 重伯努利试验中, 事件 A 在每次试验中发生概率为 p_n （注意这与实验的次数 n 有关）, 如果 $n \to \infty$ 时, $np_n \to \lambda$ (λ 为常数), 则对任意给定的非负整数 k, 有

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}.$$

泊松分布

证明. 记 $np_n=\lambda_n$, 即 $p_n=\lambda_n/n$, 于是

$$
\begin{aligned}
C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{\lambda_n^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}.
\end{aligned}
$$

对于固定的 k,

$$
\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda,\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}=\mathrm{e}^{-\lambda},\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)=1
$$

从而

$$
\lim_{n\to\infty}C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}.
$$

对于任意的非负整数 k 成立.

泊松分布

由于泊松定理是在 $n\to\infty$ 条件下获得的, 故在计算二项分布 $b(n,p)$ 时, 当 n 很大, p 很小, 而乘积 $\lambda=np$ 大小适中时, 可以用泊松分布作近似, 即

$$
C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{(np)^k}{k!}\mathrm{e}^{-np},k=0,1,2,\cdots
$$

泊松分布

例 **5.** 为保证设备正常工作, 需要配备一些维修工. 如果各台设备发生故障是相互独立的, 且每台设备发生故障的概率都是 *0.01*. 试求在以下情况下, 求设备发生故障而不能及时修理的概率.

(1) 一名维修工负责 *20* 台设备.

(2) 3 名维修工负责 90 台设备.

(3) 10 名维修工负责 500 台设备.

解. (1) 以 X_1 表示 20 台设备中同时发生故障的台数, 则 $X_1 \sim b(20, 0.01)$. 用参数为 $\lambda = np = 20 \times 0.01 = 0.2$ 的泊松分布作近似计算, 得所求概率为

$$P\{X_1 > 1\} \approx 1 - \sum_{k=0}^{1} \frac{0.2^k}{k!} e^{-0.2} = 1 - 0.982 = 0.018.$$

(2) 以 X_2 表示 90 台设备中同时发生故障的台数, 则 $X_2 \sim b(90, 0.01)$. 用参数为 $\lambda = np = 90 \times 0.01 = 0.9$ 的泊松分布作近似计算, 得所求概率为

$$P\{X_2 > 3\} \approx 1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{0.9^k}{k!} e^{-0.9} = 1 - 0.987 = 0.013.$$

注意: 此种情况下, 不但所求概率比 (1) 中有所降低, 而且 3 名维修工负责 90 台设备相当于每个维修工负责 30 台设备, 工作效率是 (1) 中的 1.5 倍. (3) 以 X_3 表示 500 台设备中同时发生故障的台数, 则 $X_3 \sim b(500, 0.01)$. 用参数为 $\lambda = np = 500 \times 0.01 = 5$ 的泊松分布作近似计算, 得所求概率为

$$P\{X_3 > 10\} \approx 1 - \sum_{k=0}^{10} \frac{5^k}{k!} e^{-5} = 1 - 0.986 = 0.014.$$

注意: 此种情况下所求概率与 (2) 中基本上一样, 而 10 名维修工负责 500 台设备相当于每个维修工负责 50 台设备, 工作效率是 (2) 的 1.67 倍, 是 (1) 中的 2.5 倍.

小注: 若干维修工共同负责大量设备的维修, 将提高工作的效率.

2.3 随机变量的分布函数

分布函数

定义. 设 X 是一个随机变量, x 是任意实数, 函数

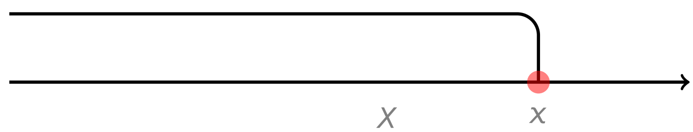
$$F(x) = P\{X \leq x\}$$

称为 X 的分布函数.

X	-1	0	1
p_k	1/4	1/2	1/4

分布函数是一个普通的函数, 其定义域是整个实数轴.

在几何上, 它表示随机变量 X 的取值落在实数 x 左边的概率.



分布函数

分布函数具有以下基本性质:

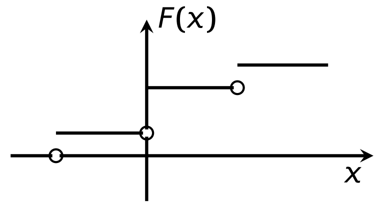
1. $0 \le F(x) \le 1$.
2. $F(x)$ 是 x 的不减函数.
3. $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
4. $F(x+0) = F(x)$, 即 $F(x)$ 是右连续的.

分布函数

例 **1.** 设随机变量 X 的分布律为 求 X 的分布函数, 并求 $P(0 \le X \le 1)$.

解: (1) 由概率的有限可加性分布函数为:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{1}{4} & -1 \le x < 0 \\ \frac{3}{4} & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$



分布函数

概率分布函数 $F(x)$ 的图像为

$$
\begin{aligned}
P\{0 \leqslant X \leqslant 1\} &= P\{0 < X \leqslant 1\} + P\{X = 0\} \\
&= F(1) - F(0) + P\{X = 0\} = 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}
$$

分布函数

一般地, 设离散型随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

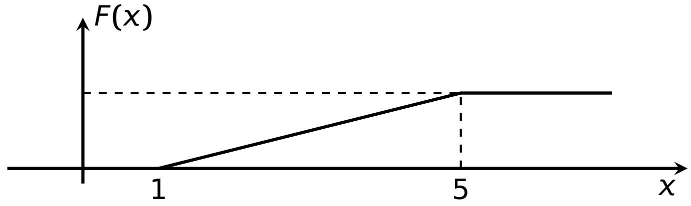
则由概率的可列可加性可得 X 的分布函数为

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_k \leq x} p_k,$$

这里的和式是对所有满足 $x_k \leq x$ 的 p_k 求和. 分布函数 $F(x)$ 在 $x = x_k (k = 1, 2, \ldots)$ 处有跳跃值, 其跳跃值为 $p_k = P\{X = x_k\}$.

分布函数

例 **2.** 在区间 $[1, 5]$ 上任意掷一个质点, 用 X 表示这个质点与原点的距离, 则 X 是一个随机变量. 如果这个质点落在 $[1, 5]$ 上任一子区间内的概率与这个区间的长度成正比, 求 X 的分布函数



分布函数

解. 由题意知 $\{1 \le X \le 5\}$ 是一个必然事件, 即

$$P\{1 \le X \le 5\} = 1;$$

若 $x < 1$, 则 $\{X \le x\}$ 是不可能事件,

$$F(x) = P\{X \le x\} = 0;$$

若 $1 \le x \le 5$, 则

$$P\{1 \le X \le x\} = k(x-1);$$

特别取 $x = 5$ 由 $P\{1 \le X \le 5\} = 1$ 可得 $k = 1/4$, 从而

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{x < 1\} + P\{1 \le X \le x\} = \frac{1}{4}(x-1).$$

分布函数

若 $x > 5$, 则 $\{X \le x\}$ 是必然事件, $F(x) = 1$. 综上, X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{4}(x-1), & 1 \le x < 5 \\ 1, & x \ge 5 \end{cases}$$

$F(x)$ 的图形如下图, 它是一个定义在 $-\infty, +\infty$ 上的一个连续函, 在整个数轴上没有一个跳跃点.

2.4 连续型随机变量及其概率密度函数

概率密度函数

定义. 对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 如果存在非负函数 $f(x)$, 使对于任意实数有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

则 X 称为连续型随机变量, 其中函数 $f(x)$ 称为 x 的概率密度函数, 简称概率密度.

概率密度函数

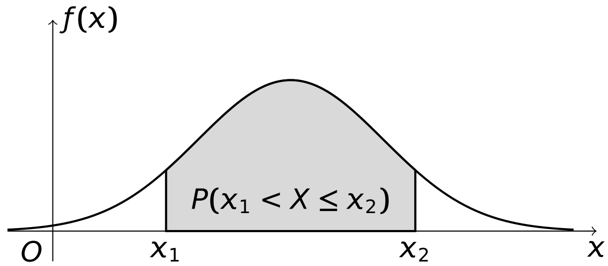
由定义知道, 概率密度 $f(x)$ 具有以下性质

1. $f(x)\geq 0$,
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1$.
3. 对于任意实数 $x_1,x_2,x_1\leq x_2$, 有
$$P\{x_1<X\leqslant x_2\}=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x.$$
4. 若 $f(x)$ 在点 x 连续, 则 $F'(x)=f(x)$.

小注: 性质 1 和性质 2 是概率密度函数的基本性质.

概率密度函数

由性质 3 可知, X 落在区间 $(x_1,x_2]$ 上的概率 $P\{x_1<X\leq x_2\}$ 等于区间 $(x_1,x_2]$ 上曲线 $f(x)$ 之下曲边梯形的面积.



概率密度函数

由性质 4, 对于 $f(x)$ 的连续点 x, 有

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{P\{x<X\leqslant x+\Delta x\}}{\Delta x}$$

这表明概率密度函数 $f(x)$ 不是随机变量 X 取 x 的概率, 而是 X 在点 x 的概率的密集程度, $f(x)$ 的大小能反映出 X 取 x 附近的值的概率大小 (因此对于连续型随机变量，用概率密度描述它的分布比分布函数更直观).

概率密度函数

例 **1.** 设连续型随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases} kx+1, & 0\le x\le 2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(1) 确定常数 k.

(2) 求 X 的分布函数 $F(x)$.

(3) 求 $P\{3/2<X\le 5/2\}$.

解. (1) 由条件易知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 \Longrightarrow \int_0^2 (kx+1)\mathrm{d}x = 1,$$

解得 $k = -1/2$.

(2) X 的分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -\frac{1}{4}x^2 + x, & 0 \le x \le 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

(3) 由 (2) 易知

$$\begin{aligned} P\{3/2 < x \le 5/2\} &= F\left(\frac{5}{2}\right) - F\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= 1 - 0.9375 = 0.0625 \end{aligned}$$

2.4.1 均匀分布

均匀分布

设连续型随机变量 X 具有概率密度

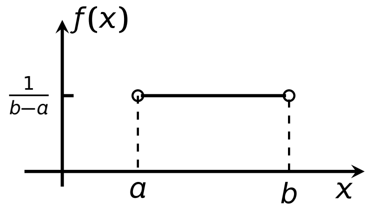
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

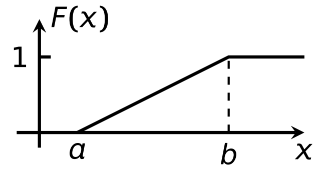
则称 X 在区间 (a,b) 上服从均匀分布, 记为 $X \sim U(a,b)$.

易知 $f(x) \ge 0$ 且 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

满足概率密度函数的两个基本性质.

均匀分布





由均匀分布的概率密度函数容易求得其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b \\ 1, & x\geqslant b \end{cases}$$

其概率密度函数和分布函数的图像为

均匀分布

注记. X 落在 (a,b) 子区间的概率只依赖于子区间的长度，与子区间的位置无关.

均匀分布有如下这些例子：

1. 四舍五入时产生的误差.
2. 查看当前时间时的分钟值.

例 **2.** 设随机变量 X 在 $[2,5]$ 上服从均匀分布, 现对 X 进行三次独立观测. 试求至少有两次测值大于 3 的概率.

解**.** 依题意得：X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{3} & ,2<x<5 \\ 0 & ,其它 \end{cases}$$

于是

$$P(X > 3) = \int_3^5 \frac{1}{3} \mathrm{d}x = \frac{2}{3},$$

设 Y 表示三次独立观测其观测值大于 3 的次数,

$$P(Y \geq 2) = C_3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + C_3^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{20}{27}.$$

2.4.2 指数分布

指数分布

定义. 如果随机变量 X 有以下概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases},$$

其中 $\lambda > 0$, 则称 X 服从参数为 λ 的指数分布, 记为

$$X \sim E(\lambda).$$

易知 $f(x) \geq 0$ 且 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathrm{d}x = 1$,

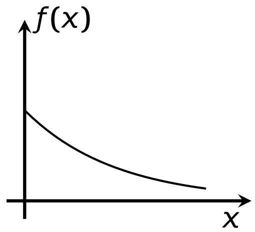
满足概率密度函数的两个基本性质.

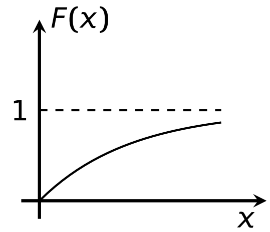
指数分布

指数分布的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}.$$

指数分布的概率密度及分布函数分别如图所示:





指数分布

指数分布经常作为时间间隔或等待时间的分布：

- 婴儿出生的时间间隔
- 客户来电的时间间隔
- 商品销售的时间间隔
- 网站访问的时间间隔
- 取号排队的等待时间
- 电子产品的寿命长度

指数分布

例 **3.** 已知某种电子元件寿命 *(*单位：*h)* 服从参数 $\lambda = 1/1000$ 的指数分布*,* 求 *3* 个这样的元件使用 *1000* 小时至少有一个已损坏的概率*.*

指数分布

解. X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1000}\mathrm{e}^{-\frac{x}{1000}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

于是

$$P\{X>1000\}=\int_{1000}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-1}$$

各元件的寿命是否超过 *1000* 小时是独立的, 因此 *3* 个元件使用 *1000* 小时都未损坏的概率为 e^{-3}, 从而至少有一个已损坏的概率为 $1-\mathrm{e}^{-3}$.

2.4.3 正态分布

正态分布

定义. 如果随机变量 X 有以下概率密度

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

其中 μ,σ 为常数且 $\sigma>0$, 则称 X 服从参数为 μ,σ 的正态分布, 简记为

$$X\sim N(\mu,\sigma^2).$$

显然 $f(x)\ge 0$, 下证 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)=1$.

正态分布

令 $\frac{x-\mu}{\sigma}=t$, 得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t.$$

又

$$\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Longrightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t=\sqrt{2\pi},$$

于是

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = 1.$$

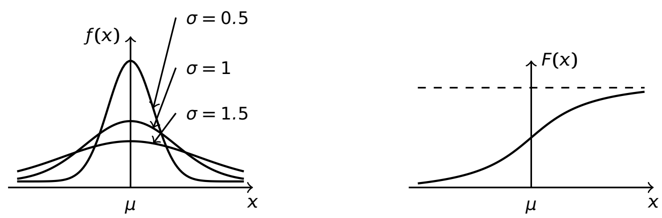
正态分布

正态分布的分布函数为

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt$$

正态分布

正态分布的概率密度函数和分布函数如图所示



(a) 密度函数 $f(x)$　　(b) 分布函数 $F(x)$

显然, 函数 $f(x)$ 的图形关于直线 $x=\mu$ 对称, $f(x)$ 在 $x=\mu$ 处达到最大. 当 μ 固定时, σ 的值越小, $f(x)$ 的图形越尖. 反之, σ 的值越大, $f(x)$ 的图形就越平.

正态分布

当 $\mu=0,\sigma=1$ 时, 称 X 服从标准正态分布, 记为 $X\sim N(0,1)$. 其概率密度和分布函数分别用为 $\varphi(x)$ 和 $\Phi(x)$ 表示, 即有

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

标准正态分布的分布函数的性质

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x).$$

引理 **1.** 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 则 $Y=\frac{X-u}{\sigma}\sim N(0,1)$.

正态分布

例 **4.** 已知 $N\sim(8,4^2)$ 求 $P\{X\leq 16\},P\{X\leq 0\}$ 及 $P\{12<X\leq 20\}$

解**.** 由引理及 X 的分布函数, 查表得

$$P\{x\leq 16\}=P\left\{\frac{x-8}{4}\leq\frac{16-8}{4}\right\}=\Phi(2)=0.9773,$$

$$P\{x\leq 0\}=P\left\{\frac{x-8}{4}\leq\frac{-8}{4}\right\}=\Phi(-2)=1-\Phi(2)=0.0227,$$

$$\begin{aligned}P\{12<x\leq 20\}&=P\left\{\frac{12-8}{4}<\frac{x-8}{4}\leq\frac{20-8}{4}\right\}\\&=\Phi(3)-\Phi(1)\\&=0.9987-0.8413=0.1574.\end{aligned}$$

例 **5.** 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 求 X 落在区间 $(\mu-k\sigma,\mu+k\sigma)$ 内的概率, $k=1,2,\ldots.$

解**.** 由引理可得

$$\begin{aligned}P\{|X-\mu|<k\sigma\}&=P\{\mu-k\sigma<X<\mu+k\sigma\}\\&=\Phi(k)-\Phi(-k)=2\Phi(k)-1\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}P\{|X-\mu|<\sigma\}&=2\Phi(1)-1=0.6826\\P\{|X-\mu|<2\sigma\}&=2\Phi(2)-1=0.9544\\P\{|X-\mu|<3\sigma\}&=2\Phi(3)-1=0.9974\end{aligned}$$

则 $P\{|X-\mu|\geqslant 3\sigma\}=1-P\{|X-\mu|<3\sigma\}=0.0026<0.003.$

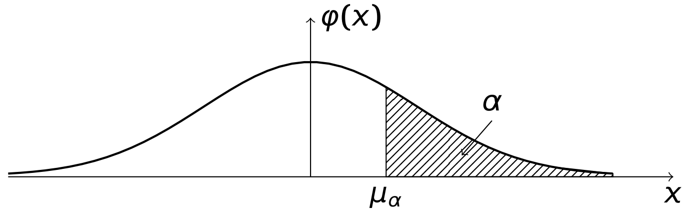
X 落在 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 以外的概率小于 *0.003*, 在实际问题中常认为它不会发生.

正态分布

设随机变量 $X \sim N(0,1)$, 对给定的 $\alpha \in (0,1)$, 称满足条件

$$P\{X > u_\alpha\} = \alpha$$

的点 u_α 为标准正态分布的上 α 分位点.



易知, $\Phi(u_\alpha) = 1 - \alpha.$

2.5　随机变量的函数的分布

随机变量函数的分布

在实际问题中, 有时我们关心的随机变量 Y 不容易直接测量, 而是要测量另外一个随机变量 X, 把 Y 表示为 X 的函数 $Y = g(X)$. 由此引出的问题是：已知 X 的分布, 如何求 Y 的分布？例如：已知圆球直径 D 的分布, 求圆球体积 $V = \dfrac{\pi D^3}{6}$ 的分布.

随机变量函数的分布

例 **1.** 设随机变量 X 有如下概率分布：

X	-1	0	1	2
p_k	0.3	0.2	0.1	0.4

求 (1) $Y=2X$, (2) $Z=(X-1)^2$ 的分布律.

解. (1) Y 的所有可能取值为 $-2,0,2,4$. 由

$$P\{Y=2k\}=P\{X=k\}=p_k$$

得 Y 的分布律为

Y	-2	0	2	4
p_k	0.3	0.2	0.1	0.4

随机变量函数的分布

(2) Z 的所有可能取值为 $0,1,4$, 故

$$\begin{aligned}
P\{z=0\} &= P\left\{(X-1)^2=0\right\}=P\{X=1\}=0.1,\\
P\{Z=1\} &= P\left\{(X-1)^2=1\right\}\\
&= P\{X=0\}+P\{X=2\}=0.6,\\
P\{Z=4\} &= P\left\{(X-1)^2=4\right\}=P\{X=-1\}=0.3.
\end{aligned}$$

故 Z 的分布律为

Z	0	1	4
p_k	0.1	0.6	0.3

随机变量函数的分布

例 **2.** 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 试证明 X 的线性函数 $Y=aX+b$ 也服从正态分布.

解. 分别记 X,Y 的概率密度函数为 $f_X(x)$,$f_Y(x)$, 分布函数为 $F_X(x)$, $F_Y(y)$. 不妨设 $a>0$, 则

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P\{Y\le y\}=P\{aX+b\le y\}\\
&= P\left\{X\le \frac{y-b}{a}\right\}=F_X\left(\frac{y-b}{a}\right)
\end{aligned}$$

对 $F_Y(y)$ 关于 y 求导, 得 $Y=aX+b$ 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\cdot\left(\frac{y-b}{a}\right)'=\frac{1}{a}f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

而 X 的概率密度函数为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<+\infty$$

所以

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(a\sigma)}e^{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2(a\sigma)^2}},-\infty<x<+\infty.$$

若 $a<0$, 以同样的方法可以求得

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(|a|\sigma)}e^{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2(a\sigma)^2}},-\infty<x<+\infty.$$

故 $\boxed{Y\sim N\left(a\mu+b,(a\sigma)^2\right)}$.

小注: 取 $a=1/\sigma$, $b=-\mu/\sigma$, 得

$$Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1).$$

例 **3.** 设随机变量 X 具有概率密度函数 $f_X(x),-\infty<x<+\infty$, 求 $Y=X^2$ 的概率密度函数.

解**.** 分别记 X,Y 的概率密度函数为 $f_X(x),f_Y(x)$, 分布函数为 $F_X(x)$, $F_Y(y)$. 先求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$. 由于 $Y=X^2\geq 0$, 故当 $y\leq 0$ 时, $F_Y(y)=0$. 当 $y>0$ 时有

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\left\{X^2\leqslant y\right\}=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}\\&=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})\end{aligned}$$

对 $F_Y(y)$ 关于 y 求导, 得 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})\right], & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$$

特别地, 若 $X\sim N(0,1)$, 其概率密度函数为

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},-\infty<x<+\infty$$

则 $Y=X^2$ 的概率密度函数是

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & y\leqslant 0\end{cases}$$

此时称 Y 服从自由度为 1 的 χ^2 分布

定理 **1.** 设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x), -\infty<x<+\infty$; 函数 $g(x)$ 处处可导且恒有 $g'(x)>0$(或恒有 $g'(x)<0$), 、则 $Y=g(X)$ 是连续型随机变量, 其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X[h(y)]\cdot|h'(y)|, & y\in(\alpha,\beta)\\ 0, & otherwise.\end{cases}$$

其中 $h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数, $\alpha=\min(g(-\infty),g(+\infty))$, $\beta=\max(g(-\infty),g(+\infty))$.

证明. 先考虑 $g'(x)>0$ 的情况. 此时 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 严格单调递增, 它的反函数 $h(y)$ 存在, 且在 (α,β) 严格单调递增. 分别记 X,Y 的概率密度函数为 $f_X(x),f_Y(x)$, 分布函数为 $F_X(x),F_Y(y)$. 先求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$. 由于 $Y=g(x)$ 在 (α,β) 取值, 故当 $y\leq\alpha$ 时, $F_Y(y)=0$; 当 $Y\geq\beta$ 时, $F_Y(y)=1$; 当 $\alpha<y<\beta$ 时,

$$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{g(X)\leq y\}=P\{X\leq h(y)\}=F_X[h(y)].$$

对 $F_Y(y)$ 关于 y 求导, 即得 Y 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X[h(y)]\cdot h'(y), & y\in(\alpha,\beta)\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

再考虑 $g'(x)<0$ 的情况, 同样的有

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X[h(y)]\cdot[-h'(y)], & y\in(\alpha,\beta)\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

综合以上两种情况, 命题得证.

注记**.** 若 $f_X(x)$ 在有限区间 $[a,b]$ 以外等于零, 则只需假设在 $[a,b]$ 区间上恒有 $g'(x)>0$(或恒有 $g'(x)<0$), 此时 $\alpha=\min(g(a),g(b))$, $\beta=\max(g(a),g(b))$.

例 **4.** 设随机变量 X 在 $(-\pi/2,\pi/2)$ 内服从均匀分布 $Y=\sin X$, 试求随机变量 Y 的概率密度函数.

解. $Y=\sin X$ 对应的函数 $y=g(x)=\sin x$ 在 $(-\pi/2,\pi/2)$ 上恒有 $g'(x)=\cos x>0$, 且有反函数

$$x=h(y)=\arcsin y, h'(y)=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

又 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

由前面结论得 $Y=\sin X$ 的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, & -1<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$