第二章　一维随机变量及其分布

1. 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度, 若

$$f(x)=\begin{cases} af_1(x), & x\le 0 \\ bf_2(x), & x>0 \end{cases} \quad (a>0, b>0)$$

为概率密度, 则 a,b 应满足 (　　).

(A) $2a+3b=4$　　**(B)** $3a+2b=4$　　**(C)** $a+b=1$　　**(D)** $a+b=2$

2. 设随机变量的概率密度为 $f_X(x)$, 则 $Y=3X-1$ 的概率密度为 $f_Y(y)=$ (　　).

(A) $\frac{1}{3}f_X(\frac{y+1}{3})$　　**(B)** $3f_X(\frac{y+1}{3})$　　**(C)** $\frac{1}{3}f_X[3(y+1)]$　　**(D)** $3f_X(\frac{y-1}{3})$

3. 下列函数中可作为随机变量分布函数的是 (　　).

(A) $F_1(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x\le 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

(B) $F_2(x)=\begin{cases} -1, & x<0; \\ x, & 0\le x<1; \\ 1, & x\ge 1. \end{cases}$

(C) $F_3(x)=\begin{cases} 0, & x<0; \\ x, & 0\le x<1; \\ 1, & x\ge 1. \end{cases}$

(D) $F_4(x)=\begin{cases} 0, & 0<0; \\ x, & 0\le x<1; \\ 2, & x\ge 1. \end{cases}$

4. 设 $F(x)$ 和 $f(x)$ 分别为某随机变量的分布函数和概率密度, 则必有 (　　).

(A) $f(x)$ 单调不减

(B) $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\mathrm{d}x=1$

(C) $F(-\infty)=0$

(D) $F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$

5. 设 $F(x)$ 是连续型随机变量 X 的分布函数, 则 $F(x)$ 在其定义域内一定是 (　　).

(A) 非阶梯型间断函数

(B) 可导函数

(C) 阶梯函数

(D) 连续但不一定可导的函数

6. 设随机变量 X 服从参数 $\lambda=\frac{1}{9}$ 的指数分布, 则 $P\{3<X<9\}=$ (　　).

(A) $\frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}}-\frac{1}{\mathrm{e}}$　　**(B)** $\frac{1}{9}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$　　**(C)** $\int_3^9 \mathrm{e}^{-\frac{x}{9}}\,\mathrm{d}x$　　**(D)** $F\left(\frac{9}{9}\right)-F\left(\frac{3}{9}\right)$

7. 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} cx^4, & 0<x<1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$，则常数 $c=$ (　　)．

(A) $\frac{1}{5}$　　(B) $\frac{1}{4}$　　(C) 4　　(D) 5

8. 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\theta(1-\theta)^{k-1}(k=1,2,\ldots)$，其中 $0<\theta<1$，若 $P\{X\le 2\}=\frac{5}{9}$，则 $P\{X=3\}=$____________.

9. 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} kx+1, & 0<x<2 \\ 0 & 其他 \end{cases}$，则 $k=$____________.

10. 设随机变量 X 服从区间 $[2,\theta]$ 上的均匀分布，且概率密度

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}, & 2\le x\le\theta \\ 0 & 其他 \end{cases},$$

则 $\theta=$____________.

11. 设随机变量 X 的概率密度函数为：$f_X(x)=\begin{cases} \frac{|x|}{4}, & -2<x<2 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，

(1)求 X 的分布函数 $F_X(x)$;

(2)令 $Y=X^2$，求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

12. 设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ Ax^2 & 0\le x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$，试求：

(1)系数 A；

(2)X 的概率密度；

(3)$P(0.3<X\le 0.7)$；

(4)$Y=X^2$ 的概率密度.

13. 设随机变量 X 服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，求随机变量函数 $Y=\mathrm{e}^X$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

14. 某次考试成绩 X（单位：分）服从正态分布 $N(75,15^2)$.

(1)求此次考试的及格率 $P\{X\geq 60\}$ 和优秀率 $P\{X\geq 90\}$;

(2)考试成绩至少高于多少分能排名前 33.33%?

(附: $\Phi(0.33)=0.6293$, $\Phi(0.431)=0.6667$, $\Phi(1)=0.8413$, $\Phi(2.18)=0.9854$)

15. 设随机变量 X 服从标准正态分布, 即 X 的概率密度为 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, 求随机变量函数 $Y=e^X$ 的概率密度.

16. 设随机变量 X 服从标准正态分布, 即 X 的概率密度为 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, 求随机变量函数 $Y=2|X|$ 的概率密度.

17. 设随机变量 X 的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}Ax+1, & 0\leq x\leq 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求:

(1)常数 A;

(2)$P\{1.5<X<2.5\}$.

18. 设随机变量 X 服从标准正态分布, 即 X 的概率密度为 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, 求 $Y=e^X$ 的概率密度.

19. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且服从同一分布. 试证明:

$$P\{a<\min(X,Y)\leq b\}=[P\{X>a\}]^2-[P\{X>b\}]^2$$