

第三章 多维随机变量及其分布

1. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 < x < 2, 0 < y < 2; \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 则 $P\{0 < X < 1, 0 < Y < 1\} = (\quad)$.
- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) 1

2. 设二维随机变量 (X, Y) 服从区域 $D: x^2 + y^2 \leq 1$ 上的均匀分布, 则 (X, Y) 的概率密度函数为 ().

- (A) $f(x, y) = 1$ (B) $f(x, y) = \frac{1}{\pi}$
- (C) $f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ (D) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

3. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 6x, & 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

则 $P\{X + Y \leq 1\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 设随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

$$P(X = i, Y = j) = \frac{i + j}{30}, i = 0, 1, 2, 3; j = 0, 1, 2.$$

则 $P\{X > 2, Y < 2\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 设二维随机变量 (X, Y) 的密度函数为:

$$f(x, y) = \begin{cases} 10x^2y, & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试求

- (1) (X, Y) 分别关于 X 和 Y 的边缘密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$, 并判断 X 与 Y 是否相互独立;

(2)求条件密度函数 $f_{Y|X}(y|0.5)$.

6. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度函数为:

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(1)讨论 X 与 Y 是否独立?

(2)求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

7. 设二维随机变量 (X, Y) 只能取下列数组中的值: $(0, 0), (-1, 1), (-1, \frac{1}{3}), (2, 0)$, 且取这些值的概率依次为 $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{5}{12}$.

(1)写出 (X, Y) 的概率分布表;

(2)求 (X, Y) 分别关于 X, Y 的边缘分布律.

8. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为:

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

试求:

(1)边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$, 并说明 X 与 Y 的独立性;

(2)在 $Y = 0.2$ 的条件下, X 的条件概率密度.

9. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为:

$$f(x, y) = \begin{cases} 3x & 0 < x < 1, 0 < y < x \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

试求:

(1)边缘密度 $f_X(x), f_Y(y)$, 并说明 X 与 Y 的独立性;

(2)条件密度 $f_{X|Y}(x|0.2)$.

10. 设事件 A, B 满足条件 $P(A) = \frac{1}{4}, P(B|A) = \frac{1}{3}, P(A|B) = \frac{1}{2}$, 定义随机变量 X, Y 如下:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{若} A \text{ 发生} \\ 0, & \text{若} A \text{ 不发生} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & \text{若} B \text{ 发生} \\ 0, & \text{若} B \text{ 不发生} \end{cases}$$

求二维随机变量 (X, Y) 的联合分布律.

11. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为:

$$f(x, y) = \begin{cases} A, & |y| < x, 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

试求:

- (1) 常数 A ;
- (2) 边缘密度 $f_X(x)$ 、 $f_Y(y)$, 并说明 X 与 Y 的独立性;
- (3) 条件密度 $f_{X|Y}(x|-0.2)$.