目录

第一章　函数

1.1　集合

1.1.1　集合的概念

定义.
- 集合是具有确定性质的对象的总体；
- 构成集合的每一个对象, 称为集合的元素.

例子.
1. 太阳系的八大行星;
2. 教室里的所有同学.

如果 a 是集合 A 中的元素, 记为 $a \in A$；否则记为 $a \notin A$.

分类：

1. 由有限个元素组成的几何称为有限集;
2. 由无限个元素组成的几何称为无限集.

表示方法：

1. 列举法　　$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$
2. 描述法　　$B = \{x \mid x \text{ 所具有的特征}\}$

定义. 如果 $x \in A$, 必有 $x \in B$, 则称 A 是 B 的子集, 记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

定义. 如果 $A \subset B$, 且 $B \subset A$, 则称 A 与 B相等, 记为 $A = B$.

例子. 若 $A = \{1,2\}, C = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, 则 $A = C$.

不含任何元素的集合称为空集, 记为 $\varnothing$.

例子. $\{x | x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$.

注记. 空集是任何集合的子集.

元素为数的集合称为数集, 人类对数的认识是逐步发展的:

- 自然数集 $\mathbf{N}$
- 整数集 $\mathbf{Z}$
- 有理数集 $\mathbf{Q}$
- 实数集 $\mathbf{R}$ $\longleftarrow$ 微积分的研究对象
- 复数集 $\mathbf{C}$

注记. $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$

1.1.2 集合的运算

1. 交集: $A \cap B = \{x \,|\, x \in A$ 且 $x \in B\}$
2. 并集: $A \cup B = \{x \,|\, x \in A$ 或 $x \in B\}$
3. 差集: $A \backslash B = \{x \,|\, x \in A$ 且 $x \notin B\}$
4. 补集 (余集): $A^c = I \backslash A = \{x \,|\, x \in I$ 且 $x \notin A\}$, 其中 I 为研究对象的全体 (全集).

1. 交换律
   - $A \cap B = B \cap A$
   - $A \cup B = B \cup A$

2. 结合律

   - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
   - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3. 分配律

   - $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
   - $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

4. 对偶律

   - $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
   - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

定义**.** 设有集合 A 和 B. 对任意的 $x \in A, y \in B$, 则称集合

$$\{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

为 A 与 B 的笛卡尔乘积(或直积), 记为 $A \times B$.

例子**.** $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) | x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$ 即为 xOy 平面上全体点的集合,$\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 常记为 $\mathbf{R}^2$.

1.1.3 区间和邻域

区间是指介于两个实数之间的全体实数. 这两个实数叫做区间的端点. 区间可分为有限区间和无限区间.

有限区间:

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\} \quad \text{开区间}$$

$$[a, b] = \{x \mid a \le x \le b\} \quad \text{闭区间}$$

$$(a, b] = \{x \mid a < x \le b\} \quad \text{左开右闭区间}$$

$$[a, b) = \{x \mid a \le x < b\} \quad \text{左闭右开区间}$$

例 **1.** 用区间表示下列数集:

(1) $\{x \mid 1 < x < 3\}$ *(2)* $\{x \mid -5 \le x < 0\}$

无限区间有如下五种：

$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}\qquad (a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$$
$$(-\infty,b]=\{x\mid x\le b\}\qquad [a,+\infty)=\{x\mid x\ge a\}$$
$$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$$

例 **2.** 用区间表示下列数集：

(1) $\{x\mid x<3\}$ *(2)* $\{x\mid x\ge 2\}$

两端点间的距离 (线段的长度) 称为区间的长度.

设 a 与 δ 是两个实数, 且 $\delta>0$,

- a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$：
  $$\left\{x\,\middle|\,|x-a|<\delta\right\}=(a-\delta,a+\delta)$$
  其中 a 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径.
- a 的去心 δ 邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$：
  $$\left\{x\,\middle|\,0<|x-a|<\delta\right\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$$
- a 的左 δ 邻域：$(a-\delta,a)$
- a 的右 δ 邻域：$(a,a+\delta)$

1.1.4 小结

1. 集合的有关概念: 集合、元素、子集、全集、空集、交集、并集、补集、直积、区间、邻域.
2. 集合的运算: 交集、并集、补集、直积的求法.
3. 区间和邻域: 连续的点组成的集合的表示方法.

思考**.** 经调查，有彩电的家庭占 *96%*，有冰箱的家庭占 *87%*，有音响的家庭占 *78%*，有空调的家庭占 *69%*，试估计四种电器都有的家庭占多少？

答案**.** 没有彩电的家庭占 *4%*，没有冰箱的家庭占 *13%*, 没有音响的家庭占 *22%*，没有空调的家庭占 *31%*, 所以四种电器都有的至少占

$$1-(4\%+13\%+22\%+31\%)=30\%$$

根据交集是任意集合的子集可知：四种电器都有的最多占 *69%*，所以四种电器都有的至少占 *30%*, 最多占 *69%*.

1.2 映射与函数

1.2.1 映射的概念

设 X 与 Y 是两个非空集合, 若对 X 中的每一个元素 x, 均可以找到 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应, 则称这个对应是集合 X 到 Y 的一个映射, 记为 f, 或者更详细地写为：

$$f: X\to Y.$$

将 x 的对应元素 y 记为

$$f(x): x\mapsto y=f(x).$$

y 称为映射 f 下 x 的像, x 称为映射 f 下 y 的原像(或逆像). 集合 X 称为映射 f 的定义域, 记为 $D_f=X$; X 的所有元素的像 $f(x)$ 的集合

$$\{y|y\in Y, y=f(x), x\in X\}$$

称为映射 f 的值域, 记为 R_f(或 $f(X)$).

例 **1.** 设 $A=\{$商场中的所有商品$\}$, $B=\{$商场中商品九月份的销量$\}$, 则

$$\begin{aligned} f: &A\to B \\ &x\mapsto y\ (y\text{是商品 } x \text{ 九月份的销量}) \end{aligned}$$

是一个映射, $D_f=A$, $R_f=B$

例 **2.** 设 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5,6,7\}$, 则

$$\begin{aligned} &f: A\to B \\ &f(1)=4,\ f(2)=5,\ f(3)=6 \end{aligned}$$

是一个映射, $D_f=A$, $R_f=\{4,5,6\}\subset B$

概括起来, 构成一个映射必须具备下列三个基本要素：

1. 集合 X, 即定义域 $D_f = X$.
2. 集合 Y, 即限制值域的范围 $R_f \subset Y$.
3. 对应法则 f, 使每个 $x \in X$, 有唯一确定的 $y = f(x)$ 与之对应.

注记. *1.* 映射要求元素的像必须是唯一的.

2. 映射并不要求元素的原像也是唯一的.

设 f 是集合 X 到集合 Y 的一个映射, 若

1. 对任意的 $x_1 \neq x_2$, 都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 为单射.
2. $R_f = Y$, 则称 f 为满射.
3. f 既是单射又是满射, 则称 f 为双射(或一一映射).

注记. 单射 $\Longleftrightarrow$ 原像唯一.

1.2.2 逆映射与复合映射

定义. 如果映射 f 是单射, 则对任一 $y \in R_f \subset Y$, 它的原像 $x \in X$ (即满足方程 $f(x) = y$ 的 x) 是唯一确定的, 于是, 对应关系

$$\begin{aligned} g : R_f &\to X \\ y &\mapsto x\ (f(x) = y) \end{aligned}$$

构成了 R_f 到 X 上的一个映射, 称之为 f 的逆映射, 记为 f^{-1}, 其定义域为 $D_{f^{-1}} = R_f$, 值域为 $R_{f^{-1}} = X$

例 **3.** 设 $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5,6\}$, 则

$$f : A \to B$$

$$x \mapsto y = x + 3$$

既是单射，又是满射，存在逆映射

$$f^{-1} : B \to A$$

$$x \to y = x - 3$$

例 **4.** 设 $A=[0,\pi]$, $B=[-1,1]$, 则

$$f: A \to B$$

$$x \mapsto y = \cos x$$

既是单射，又是满射，存在逆映射

$$f^{-1}: B \to A$$

$$x \mapsto y = \arccos x$$

定义**.** 现设有如下两个映射

$$g: X \to U_1$$

$$x \mapsto u = g(x)$$

和

$$f: U_2 \to Y$$

$$u \mapsto y = f(u),$$

如果 $R_g \subset U_2 = D_f$, 那就可以构造出一个新的对应关系

$$f \circ g: X \to Y$$

$$x \mapsto y = f[g(x)]$$

也是一个映射, 称之为 f 和 g 的 复合映射.

例 **5.** 设映射 g 与 f 为

$$g: \quad \begin{array}{l} R \to R \\ x \mapsto u = 1 - x^2 \end{array} \qquad f: \quad \begin{array}{l} R^+ \to R \\ u \mapsto y = \sqrt{u} \end{array}$$

则 $R_g = (-\infty, 1]$, 它不是 D_f 的子集, 因此不能构成复合映射 $f \circ g$. 但若将 g 的定义域缩小, 就有可能构成复合映射. 比如令

$$g^*: [-1,1] \to R$$

$$x \mapsto u = 1 - x^2$$

则可以构成复合映射 $f \circ g^*: [-1,1] \to R$

$$x \to y = \sqrt{1 - x^2}$$

1.2.3 函数的概念

定义. 设非空数集 $D \subset \mathbf{R}$, 则称映射 $f: D \to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数, 简记为

$$y = f(x),\ x \in D.$$

- x 称为自变量;
- y 称为因变量;
- D 称为定义域;
- 函数值的全体构成的数集 $R_f = \left\{ y \,\middle|\, y = f(x), x \in D \right\}$ 称为值域.

函数的两要素: 定义域与对应法则.

例 **6.** 研究 $y = x$ 和 $y = \dfrac{x^2}{x}$ 是不是相同的函数.

例 **7.** 研究 $y = x$ 和 $y = \sqrt{x^2}$ 是不是相同的函数.

注记**.** 两个函数相同, 当且仅当两者的定义域和对应法则都相同.

对未指明定义域的函数, 通常根据函数表达式确定它的自然定义域. 例如

(1) $y = \sqrt{x}$ 的定义域为 $D = [0, +\infty)$,

(2) $y = \log_a x$ 的定义域为 $D = (0, +\infty)$,

(3) $y = \frac{1}{x}$ 的定义域为 $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

求函数的自然定义域时有三个基本要求:

(1) 根号里面要求大于等于零;

(2) 对数里面要求大于零;

(3) 分母要求不能等于零.

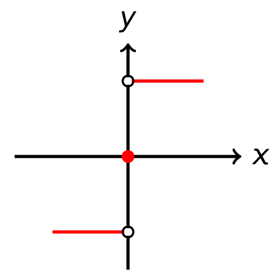
如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值总是只有一个，这种函数叫做单值函数，否则叫做多值函数.

例子. $x^2+y^2=a^2$ 是多值函数.

定义. 点集 $C=\{(x,y)|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形.

(1) 符号函数:

$$y=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1, & 当x>0,\\ 0, & 当x=0,\\ -1 & 当x<0.\end{cases}$$

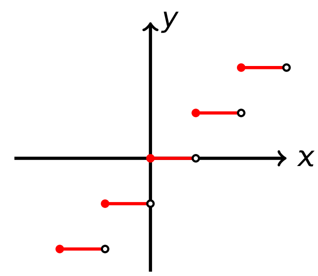


$x=\mathrm{sgn}x|x|$

(2) 取整函数: $y=[x]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

显然

$$x-1<[x]\le x$$

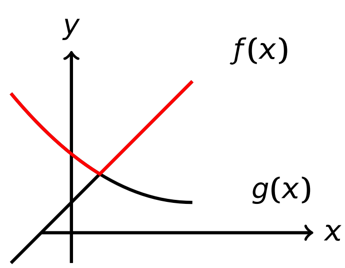


(3) 狄利克雷函数:

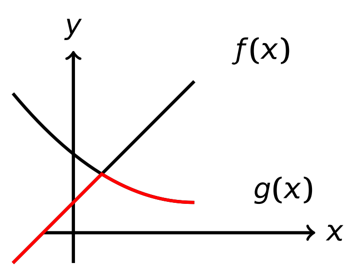
$$y=D(x)=\begin{cases}1, & 当\ x\ 是有理数时;\\ 0, & 当\ x\ 是无理数时.\end{cases}$$

(4) 取最值函数

$y=\max\{f(x),g(x)\}$



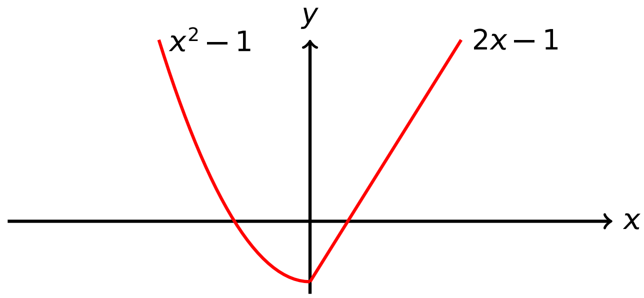
$y=\min\{f(x),g(x)\}$



如果一个函数在定义域的不同部分用不同的公式来表达, 则称该函数为分段函数.

例子.

$$f(x)=\begin{cases}2x-1, & x>0,\\ x^2-1, & x\le 0.\end{cases}$$



例 **8.** 设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & -1\le x\le 0\\ e^x-1, & 0<x\le 2\end{cases}$, 求 $f(0)$ 、$f(1)$ 及 $f(x)$ 的定义域.

解. 易知

$$f(0)=0+1=1,$$

$$f(1)=\mathrm{e}^1-1=\mathrm{e}-1,$$

$$f(x) \text{ 的定义域为: } [-1,2].$$

1.2.4 函数的基本性态

给定函数 $y=f(x)$, 设其定义域 D 关于原点对称,

1. 若 $\forall x\in D$, 总有 $f(-x)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数.
2. 若 $\forall x\in D$, 总有 $f(-x)=-f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

例子. x, x^3, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^3}$, $\sin x$, $\tan x$ 为奇函数.

例子. x^2, x^4, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^4}$, $\cos x$ 为偶函数.

注记**.** 奇函数关于原点对称; 偶函数关于 y 轴对称.

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D, 如果存在一个不为零的常数 l, 使得对任意的 $x\in D$, 有 $(x\pm l)\in D$, 且

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数; l 称为 $f(x)$ 的周期, 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例子**.** $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 以 2π 为周期.

例子**.** $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 以 π 为周期.

例 **9.** 设函数 $y=f(x),x\in R$ 的图形关于直线 $x=a$ 与 $x=b$ $(a<b)$ 均对称，证明 $y=f(x)$ 是周期函数, 并求周期.

证明. 由条件知：

$$f(a+x)=f(a-x),\ f(b+x)=f(b-x),$$

于是

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a+(x-a)) = f(a-(x-a)) \\ &= f(2a-x) \\ &= f(b-(b+x-2a)) = f(b+(b+x-2a)) \\ &= f(x+2(b-a)) \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 是周期函数，且 $2(b-a)$ 是它的一个周期.

定义**.** 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D, 区间 $I\subset D$, x_1,x_2 为区间 I 上的任意两个数,

(1) 若当 $x_1<x_2$ 时, 恒有 $f(x_1)<f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加或递增;

(2) 若当 $x_1<x_2$ 时, 恒有 $f(x_1)>f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少或递减;

例子**.** $y=x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调增加的.

例子**.** $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调增加的.

例子. $y=1/x$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调减少.

例子. $y=x^2$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调减少, 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加.

定义. 设函数 $y=f(x)$ 在数集 I 上有定义, 如果存在一个正数 M, 对于所有 $x\in I$, 恒有 $|f(x)|\le M$, 则称函数 $f(x)$ 是在 I 上的有界函数. 若不存在这样的 M, 则称 $f(x)$ 是在 I 上的无界函数.

例子. $y=\sin x$, $y=\cos x$ 是有界函数.

例子. $y=x^2$, $y=\tan x$, $y=x\cos x$ 是无界函数.

1.2.5　小结

1. 映射的有关概念: 映射、逆映射、复合映射.
2. 函数的有关概念: 函数、定义域、值域.
3. 函数的几种特性: 奇偶性、周期性、单调性、有界性.

思考. 已知 $f(x)$ 是一个偶函数，且满足 $f(a+x)=f(a-x)$, 则 $f(x)$ 是不是一个周期函数？若是，请说明它的一个周期，若不是，请说明理由.

答案. 若 $a\ne 0$ 则为周期函数, 且周期为 $2a$(见例 9); 若 $a=0$, 则不一定为周期函数.

1.3　复合函数与反函数　初等函数

1.3.1　复合函数

定义. 设 f 和 g 为两个函数, 且 $D_f\cap R_g\ne\varnothing$, 则称定义在

$$\{x \mid x\in D_g, g(x)\in D_f\}$$

上的函数 $f\circ g$ 为 f 和 g 的复合函数, 其中

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)].$$

对于复合函数 $f\circ g$, 称 x 为自变量, u 为中间变量, y 为因变量.

例 **1.** 两个函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=1-x^2$ 的复合函数是 $y=\sqrt{1-x^2}$.

注记**.** *1.* 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数.

例子**.** $y=\arcsin u, u=2+x^2; y\neq \arcsin\left(2+x^2\right)$.

2. 复合函数可以由两个以上的函数经过复合构成.

例子**.** $y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}},\quad y=\sqrt{u},\quad u=\cot v,\quad v=\frac{x}{2}$.

1.3.2 反函数

定义**.** 设函数 $f:D\to f(D)$ 是单射, 则它存在逆映射

$$f^{-1}:f(D)\to D,$$

称此映射 f^{-1} 为函数 f 的 反函数.

注记**.** *1.* 反函数 f^{-1} 由函数 f 确定.

2. 函数与反函数的图像关于 $y=x$ 对称.

例 **2.** 求函数 $y=\sqrt{e^x+1}$ 的反函数.

解**.** 由 $e^x=y^2-1$ 可得

$$x=\ln\left(y^2-1\right).$$

又 $y=\sqrt{e^x+1}>1$, 即原函数的值域为 $(1,+\infty)$, 因此反函数为

$$y=\ln\left(x^2-1\right),$$

反函数的定义域为:

$$D_{f^{-1}}=(1,+\infty)$$

定理 (反函数存在定理)**.** 单调函数 f 必存在单调的反函数, 且此反函数与 f 具有相同的单调性.

1.3.3　函数的运算

设函数 $f(x), g(x)$ 的定义域分别是 D_1 、D_2, $D = D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$, 则我们可以定义这两个函数的下列运算:

1. 函数的和 (差):
$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x),\ x \in D;$$
2. 函数的积:
$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),\ x \in D;$$
3. 函数的商:
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ x \in D \backslash \{x \mid g(x) = 0\}.$$

例 **3.** 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-l, l)$, 证明必定存在 $(-l, l)$ 上的偶函数 $g(x)$ 及奇函数 $h(x)$ 使得

$$f(x) = g(x) + h(x).$$

证明. 假设存在 $g(x)$ 和 $h(x)$ 满足条件, 则有

$$\begin{cases} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x) \end{cases}$$

故有

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \\ h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] \end{cases}$$

易知, $g(x)$,$h(x)$ 满足条件.

1.3.4　初等函数

下面这五种函数, 统称为基本初等函数:

1. 幂函数 $y = x^{\mu}$;

2. 指数函数 $y = a^x$；
3. 对数函数 $y = \log_a x$；
4. 三角函数 $y = \sin x$, $y = \cos x$, 等；
5. 反三角函数 $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, 等.

由五种基本初等函数经过有限次四则运算和函数复合所得到的函数, 称为初等函数.

练习. 将下列初等函数分解为简单函数的复合

(1) $y = (1 + \ln x)^5$ .... $y = u^5$, $u = 1 + \ln x$.

(2) $y = \sin^2(3x + 1)$ .... $y = u^2$, $u = \sin v$, $v = 3x + 1$.

1.3.5 小结

1. 复合函数: 复合函数的形成与复合过程的分解.
2. 反函数: 反函数的基本求法.
3. 函数的运算: 简单函数的四则运算.
4. 基本初等函数 幂函数、指数函数与对数函数、三角函数与反三角函数.
5. 初等函数: 基本初等函数的复合.

思考. 已知 $f(\tan x) = \sec^2 x + 1$, 求 $f(x)$.

答案. 易知 $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$, 因此

$$f(\tan x) = \left(\tan^2 x + 1\right) + 1,$$

所以

$$f(x) = \left(x^2 + 1\right) + 1 = x^2 + 2.$$

思考. 分段函数一定不是初等函数吗?

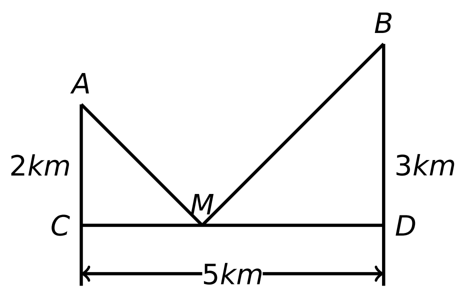
答案. 不一定，考察函数

$$y = \begin{cases} x & x \geq 0, \\ -x & x < 0, \end{cases}$$

它是一个分段函数, 但是, $y = |x| = \sqrt{x^2}$ 根据定义，它是一个初等函数.

1.4 函数关系的建立

例 **1.** 在一条直线公路的一侧有 A、B 两村，其位置如图所示，公共汽车公司欲在公路上建立汽车站 M. A、B 两村各修一条直线大道通往汽车站，设 $CM = x(km)$，试把 A、B 两村通往 M 的大道总长 $y(km)$ 表示为 x 的函数.



解. 根据题意和图示知

$$CM = x, DM = 5 - x.$$

在直角三角形 ACM 中,

$$AM = \sqrt{x^2 + 4},$$

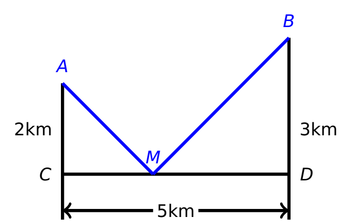
在直角三角形 BDM 中,

$$BM = \sqrt{(5 - x)^2 + 9}.$$

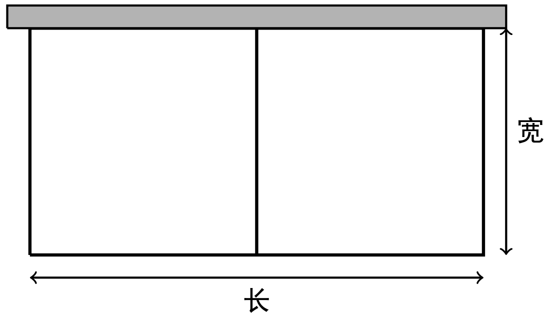
所以

$$\therefore y = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{(5 - x)^2 + 9},$$

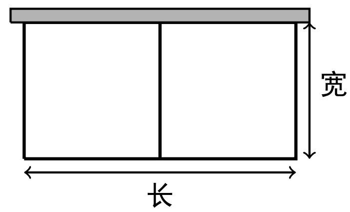
此函数的定义域为 $D = [0, 5]$.



例 **2.** 如图, 以墙为一边用篱笆围成长方形的场地，并用平行于宽的篱笆隔开. 已知篱笆总长为 60 米. 把场地面积 $S(m^2)$ 表示为场地宽 $x(m)$ 的函数，并指出函数的定义域.



解. 设篱笆的宽为 x , 则



$$长 = 60 - 3x$$

因此

$$S = x(60-3x) = -3x^2 + 60x,$$

其定义域为 $\{x|0 < x < 20\}$.

例 **3.** 某工厂每年需某种原料 a 吨，拟分若干批购进，每批进货的费用为 b 元. 设该厂使用这种原料是均匀的，即平均库存量为批量的一半. 每吨原料的库存费用每年为 c 元. 试求出一年中库存费用与进货费用之和与进货批量的函数关系.

解. 设进货批量为 x 吨, 进货费用与库存费用之和为 $p(x)$. 因年进货量为 a，故每年进货批数为 $\frac{a}{x}$, 则进货费用为

$$b\frac{a}{x}.$$

因为使用这种原料是均匀的，即平均库存为 $\frac{x}{2}$，故每年的库存费为 $c \cdot \frac{x}{2}$, 所以

$$p(x) = \frac{ab}{x} + \frac{c}{2} \cdot x,$$

其定义域为 $(0, a]$

例 **4.** 某人从美国到加拿大去度假，已知把美元兑换成加拿大元时，币面数值增加 *12%*, 而把加拿大元兑换成美元时，币面数值减少 *12%*. 请证明经过这样一来一回的兑换后，他亏损了多少钱.

解. 设 $f_1(x)$ 为将 x 美元兑换成的加拿大元数, $f_2(x)$ 为将 x 加拿大元兑成的美元数，则

$$f_1(x) = x + x \cdot 12\% = 1.12x, x \geq 0$$
$$f_2(x) = x - x \cdot 12\% = 0.88x, x \geq 0$$
$$f_2(f_1(x)) = 0.88 \times 1.12x = 0.9856x < x$$

故 $f_1(x), f_2(x)$ 不互为反函数，经过一来一回的兑换后，x 美元变成 $0.9856x$ 美元，即发生了亏损.

例如: *1000* 美元经过这样的来回兑换，将亏损 *14.4* 美元.

练习题：

(1) 设生产与销售某种商品的总收入函数 R 是产量 x 的二次函数，经统计得知当产量分别为 0,2,4 时，总收入 R 为 0,6,8，试确定 R 关于 x 的函数式.

(2) 某商店年销售某种产品 800 件，均匀销售，分批进货. 若每批订货费为 60 元，每件每月库存费 0.2 元. 试列出库存费与进货费之和 P 与批量 x 之间的函数关系.

(3) 某企业对某产品制定如下销售策略：购买 20 公斤以下（包括 20 公斤）部分，每公斤价 10 元；购买量小于等于 200 公斤时，其中超出 20 公斤的部分，每公斤 7 元；购买超过 200 公斤的部分，每公斤价 5 元，试写出购买量 x 公斤的费用函数 $C(x)$.

(4) 某车间设计最大生产能力为每月 100 台机床，至少要完成 40 台方可保本, 当生产 x 台时的总成本函数为 $C(x)=x^2+10x$ (百元). 按市场规律，价格为 $P=250-5x$(x 为需求量)，可以销售完，试写出月利润函数.

(1) $R(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+4x$;

(2) $P=1.2x+\dfrac{48000}{x}$;

(3) $C(x)=\begin{cases} 10x, 0\le x\le 20 \\ 60+7x, 20<x\le 200 \\ 5x+460, x>200 \end{cases}$;

(4) $L(X)=240x-6x^2(40\le x\le 100)$.

1.5 经济学中的常用函数

1.5.1 需求函数

需求量: 某一商品关于一定的价格水平, 在一定的时间内, 消费者愿意而且有支付能力购买的商品量.

如果价格是决定需求量的最主要因素，可以认为需求量 Q_d 是 P 的函数, 称为需求函数，记作

$$Q_d = Q_d(P).$$

常见需求函数有:

1. 线性函数 $Q_d = -aP + b$, 其中 $a > 0$;
2. 幂函数 $Q_d = kP^{-a}$, 其中 $k > 0, a > 0$;
3. 指数函数 $Q_d = a\mathrm{e}^{-bp}$, 其中 $a, b > 0$.

例 **1.** 设某商品的需求函数为

$$Q = -aP + b \quad (a, b > 0)$$

讨论 $P = 0$ 时的需求量和 $Q = 0$ 时的价格.

解**.** $P = 0$ 时 $Q = b$, 它表示价格为零时的需求量为 b，称为饱和需求量;

$Q = 0$ 时 $P = \dfrac{b}{a}$, 它表示价格为 $\dfrac{b}{a}$ 时无人愿意购买此商品.

1.5.2 供给函数

供给量: 在一定的价格条件下，在一定时期内生产者愿意并可供出售的商品量．如果价格是决定供给量的最主要因素，可以认为供给量 Q_s 是 P 的函数, 称为供给函数，记作

$$Q_s = Q_s(P).$$

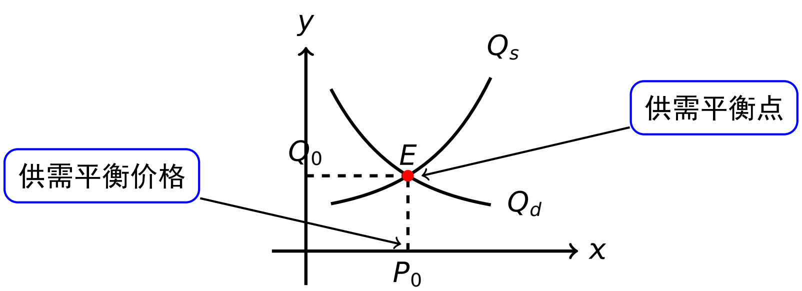
常见供给函数有:

1. 线性函数 $Q_s = aP + b$, 其中 $a > 0$;

2. 幂函数 $Q_s = kP^{\alpha}$, 其中 $k > 0, \alpha > 0$;

3. 指数函数 $Q_s = a\mathrm{e}^{bP}$, 其中 $a, b > 0$.

在同一个坐标系中作出需求函数 Q_d 和供给函数 Q_s，两条曲线的交点称为供需平衡点(E)，该点的横坐标称为均衡价格(P_0)，该点的纵坐标称为均衡数量(Q_0).



当 $P \neq P_0$ 时，市场力量会推动 P 趋向 P_0. 寻求 P_0 是金融经济学的主要问题之一.

例 **2.** 考虑下列线性需求函数和供给函数：

$$D(P) = a - bP,\ b > 0; \quad S(P) = c + eP,\ e > 0$$

试问 a, c 满足什么条件时，存在正的均衡价格 (即 $P_e > 0$)?

解**.** 由 $D(P) = S(P)$ 得 : $a - bP = c + eP$, 由此可得均衡价格为

$$P_e = \frac{a-c}{b+e}.$$

因此 $P_e > 0$ 的必要充分条件是 $a > c$.

1.5.3　总成本函数、总收益函数、总利润函数

总成本: 生产和经营一定数量产品所需要的总投入.

在不计市场的其他次要影响因素的情况下, 它可以简单地看成是产量 Q 的函数, 称为总成本函数, 记为 $C(Q)$.

通常总成本由固定成本和可变成本两部分组成.

$$C(Q) = C_{固定}(Q) + C_{可变}(Q).$$

称

$$\overline{C}(Q)=\frac{C(Q)}{Q}=\frac{C_{\text{固定}}(Q)}{Q}+\frac{C_{\text{可变}}(Q)}{Q},$$

为平均成本.

例 **3.** 已知某种产品的总成本函数为 $C(Q)=1000+\frac{Q^2}{8}$ 求当生产 *100* 个该产品时的总成本和平均成本**.**

解**.** 由题意，产量为 *100* 时的总成本为

$$C(100)=1000+\frac{100^2}{8}=2250$$

所以平均成本为 $\overline{C}(100)=\frac{2250}{100}=22.5$

总收益: 出售一定数量产品所得到的全部收入，它可以简单地看成是销量 Q 的函数, 称为总收益函数, 记为 $R(Q)$. 称 $\overline{R}(Q)=\frac{R(Q)}{Q}$ 为平均收益. 如果产品价格 P 保持不变，则

$$R(Q)=PQ,\ \overline{R}=P.$$

例 **4.** 设某商品的需求关系是 $3Q+4P=100$, 求总收益和平均收益.

解**.** 由条件知, 价格函数为

$$P=\frac{100-3Q}{4},$$

所以总收益为

$$R(Q)=P\cdot Q=\frac{100Q-3Q^2}{4},$$

平均收益为

$$\overline{R}(Q)=P(Q)=\frac{100-3Q}{4}.$$

总利润: 总收益减去总成本和上缴税金后的余额 (为简单起见，一般不计上缴税金).

在不计市场的其他次要影响因素的情况下, 它可以简单地看 Q 的函数, 称为总利润函数, 记为

$$L(Q)=R(Q)-C(Q).$$

称 $\overline{L}(Q)=\dfrac{L(Q)}{Q}$ 为平均利润.

例 **5.** 设某种商品的总成本为 $C(Q)=20+2Q+0.5Q^2$ 若每售出一件该商品的收入是 *20* 万元，求生产 *10* 件的总利润.

解**.** 由题意知 $P=20$ *(*万元），总收益为 $R(Q)=P\cdot Q=20Q.$ 所以

$$\begin{aligned}L(Q)&=R(Q)-C(Q)\\&=20Q-\left(20+2Q+0.5Q^2\right)\\&=-20+18Q-0.5Q^2\end{aligned}$$

因此 $L(10)=\left(-20+18\times10-0.5\times10^2\right)=110($ 万元$)$

1.5.4　库存函数

设某企业在计划期 T 内，对某种物品总需求量为 Q ，由于库存费用及资金占用等因素，显然一次进货是不划算的，考虑均匀的分 n 次进货，每次进货批量为 $q=\dfrac{Q}{n}$，进货周期为 $t=\dfrac{T}{n}$. 假定每件物品的贮存单位时间费用为 C_1，每次进货费用为 C_2，每次进货量相同，进货间隔时间不变，以匀速消耗贮存物品，则平均库存为 $\dfrac{q}{2}$，在时间 T 内的总费用 E 为

$$E=\frac{1}{2}C_1Tq+C_2\frac{Q}{q}$$

其中 $\dfrac{1}{2}C_1Tq$ 是贮存费, $C_2\frac{Q}{q}$ 是进货费用.

练习题：

1. 设需求函数由 $P+Q=1$ 给出，(1) 求总收益函数; (2) 若售出 1/3 单位，求其总收益.
2. 某工厂对棉花的需求函数由 $PQ^{1.4}=0.11$ 给出, (1) 求其总收益函数 R; (2) $P(12)$,$R(10)$, $R(12)$,$R(15)$,$P(15)$,$P(20)$.
3. 若工厂生产某种商品，固定成本 200,000 元，每生产一单位产品，成本增加 1000 元，求总成本函数.

4. 某厂生产一批元器件，设计能力为日产 100 件，每日的固定成本为 150 元，每件的平均可变成本为 10 元，(1) 试求该厂此元器件的日总成本函数及平均成本函数;(2) 若每件售价 14 元，试写出总收入函数; (3) 试写出总利润函数.

5. 某产品之需求函数为 $Q_d = 20-3P$, 供给函数为 $Q_s = 5P-1$, 求该商品的均衡价格.

1. $R = Q-Q^2, R\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2}{9}$.

2. $R = 0.11Q^{-0.4}$, $P(15) = 0.0025$, $P(12) = 0.0034$,

   $P(20) = 0.0017$, $R(10) = 0.044$, $R(12) = 0.041$,

   $R(15) = 0.037$

3. $C = C(Q) = 200000+1000Q$

4. (1) $C(X) = 150+10X\ (0 < X \le 100)$

   $$\overline{C}(X) = \frac{150}{X}+10\ (0 < X \le 100)$$

   (2) $R(X) = 14X\ (0 < X \le 100)$

   (3) $L(X) = -150+4X\ (0 < X \le 100)$

5. $$R = \begin{cases} 250x, 0 \le x \le 600 \\ 250\times 600+(250-20)(x-600), 600 < x \le 800 \\ 250\times 600+230\times 200, x > 800 \end{cases}$$