目录

第十章　微分方程与差分方程

10.1　微分方程的基本概念

微积分研究的主要对象是函数. 因此, 如何寻找函数关系在实践中具有十分重要的意义.

在自然科学、生物科学以及经济与管理科学的许多领域中, 反映变量之间内在联系的函数关系, 往往都不能直接得到, 而必须通过建立实际问题的数学模型 —— 微分方程, 并求解这个微分方程才能得到.

积分问题：已知 $y' = f(x)$, 求 y.

微分方程：已知含 y 及其若干阶导数的方程，求 y.

例 **1.** 一曲线通过点 $(1,2)$, 且在该曲线上任一点 $M(x,y)$ 处的切线斜率为 $2x$, 求这曲线的方程.

解**.** 设所求曲线为 $y = y(x)$, 由题有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$$

且满足: 当 $x = 1$ 时, $y = 2$.

两边积分, 得 $y = \int 2x\,\mathrm{d}x$ 即 $y = x^2 + C$, 求得 $C = 1$.

所以, 所求曲线方程为

$$y = x^2 + 1.$$

定义 **1.** 含有未知函数的导数或微分的方程

$$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)}) = 0$$

称为微分方程．其中出现的导数的最高阶数 n，称为微分方程的阶．

例子**.** 判别下列微分方程的阶数：

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=x$

(2) $x\,\mathrm{d}x-y^2\,\mathrm{d}y=0$

(3) $y''+y'=\mathrm{e}^x$

1. 按阶数分
   - 一阶微分方程：$F(x,y,y')=0$ 或 $y'=f(x,y)$;
   - 高阶 (n 阶) 微分方程：
   $$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \text{ 或 } y^{(n)}=F(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$$
2. 按未知函数变量的个数分类
   - 常微分方程：未知函数是一元函数
   - 偏微分方程：未知函数是多元函数
3. 按线性与非线性分类
   - 线性微分方程：形如
   $$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$
   的方程
   - 不是线性微分方程的微分方程
4. 按方程个数分类
   - 单个微分方程
   - 微分方程组

定义 **2.** 代入微分方程能使方程成为恒等式的函数称为微分方程的解**.**

设 $y=\varphi(x)$ 在区间 I 上有 n 阶导数,

$$F\left(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x)\right)=0$$

则称函数 $y=\varphi(x)$ 为微分方程在区间 I 上的解.

例 **2.** $y=x^2+c$ 是方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$ 的解.

例 **3.** 验证下列函数都是微分方程 $y''-2y'+y=0$ 的解.

(1) $y=C\mathrm{e}^x$ *(2)* $y=x\mathrm{e}^x$

(3) $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x$

解**.** 将函数分别带入微分方程，容易验证等式成立，故他们均是微分方程的解.

注记**.** 上述解的区别：有的含有任意常数，有的不含有.

1. 通解: 微分方程的解中含有独立的任意常数 (它们不能通过合并使得任意常数的个数减少), 且独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同.

2. 特解: 确定了通解中任意常数以后的解. (用来确定任意常数的条件称为初始条件).

注记**.** 微分方程解的的图像叫做微分方程的积分曲线，通解的图像叫做积分曲线族.

初值问题: 求微分方程满足初始条件的特解的问题.

一阶: $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y_{|x=x_0}=y_0 \end{cases}$ 过定点的积分曲线;

二阶: $\begin{cases} y''=f(x,y,y') \\ y_{|x=x_0}=y_0, y'_{|x=x_0}=y'_0 \end{cases}$ 过定点且在定点的切线的斜率为定值的积分曲线.

例 **4.** 求解一阶微分方程 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x \\ y\big|_{x=1}=3 \cdots\cdots \text{初始条件} \end{cases}$

解**.** 对方程两边积分，得到

$y=x^2+C$（C 为任意常数）$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 通解

将 $x=1$ 时 $y=3$ 代入上式，得到 $C=2$. 因此

$y=x^2+2$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 特解

注记 **1.** 上述方法称初等积分法：通解可以通过两边求积分得到.

例 **5.** 求解二阶微分方程 $\begin{cases} y'' = -1, \\ y|_{x=0} = 0,\ y'|_{x=0} = 1. \end{cases}$

解. 对方程两边积分，得到

(1) $y' = -x + C_1$（C_1 为常数）

再对前式两边积分，得到

(2) $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2$（$C_1, C_2$ 为常数）$\cdots\cdots$ 通解

将初始条件 $y'|_{x=0} = 1$ 代入 *(1)*，得到 $C_1 = 1$.

将初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 代入 *(2)*，得到 $C_2 = 0$. 因此

$y = -\dfrac{1}{2}x^2 + x$ $\cdots\cdots$ 特解

本节基本概念：

1. 微分方程;
2. 微分方程的阶;
3. 微分方程的解;
   - 初值问题;
   - 初始条件;
   - 通解;
   - 特解;
   - 积分曲线.

思考. 函数 $y = 3e^{2x}$ 是微分方程 $y'' - 4y = 0$ 的什么解?

答案. 易知

$$y' = 6e^{2x},\ y'' = 12e^{2x},$$

带入方程得

$$y'' - 4y = 12e^{2x} - 4 \cdot 3e^{2x} = 0.$$

故方程是微分方程的解，又 $y = 3e^{2x}$ 不含任意常数，故解为特解.

10.2 一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为 $F(x, y, y') = 0$. 对应的初始条件为 $y|_{x=x_0} = y_0$. 在这一节中，我们将研究 3 种一阶微分方程：

1. 可分离变量的微分方程
2. 齐次方程
3. 一阶线性微分方程

10.2.1 可分离变量的微分方程

若一阶微分方程可以写为 $f(y)\,\mathrm{d}y = g(x)\,\mathrm{d}x$，则称方程为可分离变量的微分方程.

对这种方程的两边同时积分，就可以求出它的通解.

$$\begin{aligned} f(y)\,\mathrm{d}y = g(x)\,\mathrm{d}x &\Longrightarrow \int f(y)\,\mathrm{d}y = \int g(x)\,\mathrm{d}x \\ &\Longrightarrow F(y) = G(x) + C \end{aligned} \tag{10.2.1}$$

例 **1.** 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy$ 的通解.

解**.** 分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = 2x\,\mathrm{d}x,$$

两端积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 2x\,\mathrm{d}x$, 得

$$\ln|y| = x^2 + C_1 \Longrightarrow y = \pm \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{x^2}.$$

记 $\pm\mathrm{e}^{C_1}$ 为 C, 则方程的通解为 $y = C\mathrm{e}^{x^2}$.

练习 **1.** 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2y$ 的通解.

答案. 分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=3x^2\,\mathrm{d}x,$$

两边积分 $\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 3x^2\,\mathrm{d}x$ 得

$$\ln|y|=x^3+C_1\Longrightarrow y=\pm\mathrm{e}^{x^3+C_1}=\pm e^{C_1}\mathrm{e}^{x^3}$$

令 $C=\pm\mathrm{e}^{C_1}$, 则 $y=C\mathrm{e}^{x^3}$ (C 为任意常数)

例 **2.** 求解方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=ky$ (指数增长与指数衰减方程)

解. 分离变量得

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y=k\,\mathrm{d}x.$$

两端积分, 得

$$\ln|y|=kx+c,\Longrightarrow|y|=\mathrm{e}^{kx+c}=\mathrm{e}^c\cdot\mathrm{e}^{kx}=A\mathrm{e}^{kx}$$

其中 $A=\mathrm{e}^c$ 为任意正常数, 所以

$$y=(\pm A)e^{kx}=B\mathrm{e}^{kx}$$

是方程的通解. 由此可知，微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=kx$ 的解当 $k>0$ 时总是指数增长的, 当 $k<0$ 时，总是指数衰减的.

例 **3.** 解初值问题 $\begin{cases}xy\,\mathrm{d}x+\left(x^2+1\right)\mathrm{d}y=0\\ y(0)=1\end{cases}$

解. 分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

两边积分得

$$\ln|y|=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\ln|C|,$$

即 $y\sqrt{x^2+1}=C$ (C 为任意常数).

由初始条件得 $C=1$ ，故所求特解为

$$y\sqrt{x^2+1}=1.$$

练习 **2.** 求方程 $(1+\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}y = y\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ 的通解.

答案**.** 分离变量得：

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x,$$

两边积分得：

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \ln|y| = \ln(1+\mathrm{e}^x) + c_1,$$

于是方程的通解为

$$y = c(1+\mathrm{e}^x).$$

10.2.2 齐次方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

的微分方程称为齐次方程.

例如：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x-2y}{x+y}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2}{xy-x^2}$$

1. 标准化：将微分方程化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x})$
2. 换元：令 $u = \frac{y}{x}$，则有 $y = xu$，从而
   $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u$．代入原方程得到
   $$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u = f(u)$$
3. 分离变量：得到 $\frac{\mathrm{d}u}{f(u)-u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$

4. 两边积分：得到通解，然后将 u 代回

例 **4.** 求解微分方程

$$\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+x\cos\frac{y}{x}\,\mathrm{d}y=0.$$

解**.** 令 $u=\frac{y}{x}$, 则 $\mathrm{d}y=u\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}u$, 于是

$$(x-ux\cos u)\,\mathrm{d}x+x\cos u(u\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}u)=0,$$

分离变量得

$$\cos u\,\mathrm{d}u=-\frac{\mathrm{d}x}{x}\Longrightarrow\sin u=-\ln|x|+C.$$

微分方程的通解为

$$\sin\frac{y}{x}=-\ln|x|+C.$$

例 **5.** 求解微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{\mathrm{d}y}{2y^2-xy}$.

解**.** 由条件可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2y^2-xy}{x^2-xy+y^2}=\frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

令 $u=\frac{y}{x}$, 则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, 带入上述方程可得

$$u+xu'=\frac{2u^2-u}{1-u+u^2}.$$

分离变量并化简可得

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u}\right)-\frac{2}{u-2}+\frac{1}{u-1}\right]\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两边同时积分可得

$$\ln|u-1|-\frac{3}{2}\ln|u-2|-\frac{1}{2}\ln|u|=\ln|x|+\ln C_1$$

化简可得

$$\frac{u-1}{\sqrt{u}(u-2)^{\frac{3}{2}}}=Cx,\ (C=\pm C_1)$$

故微分方程的解为

$$(y-x)^2 = C^2 y(y-2x)^3.$$

练习 **3.** 求微分方程 $\left(x\tan\frac{y}{x}+y\right)\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}y$ 在初始条件 $y|_{x=2}=\pi$ 下的特解.

解**.** 方程即为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan\frac{y}{x}+\frac{y}{x}$.

- 令 $v=\frac{y}{x}$，得到 $x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v=\tan v+v$.
- 分离变量，得到 $\cot v\,\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}x}{x}$.
- 两边积分，得到 $\ln|\sin v| = \ln|x| + C_0$.
- 整理等式，得到 $\sin v = Cx$，即 $\sin\frac{y}{x} = Cx$.

代入初始条件，得到 $C=\frac{1}{2}$，故特解为 $\sin\frac{y}{x}=\frac{1}{2}x$.

10.2.3　一阶线性微分方程

一阶线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$.

- 若 $q(x)\equiv 0$，称为一阶线性齐次微分方程
- 若 $q(x)\not\equiv 0$，称为一阶线性非齐次微分方程

. . . .

(1)　$y'+xy=x^2$　✓

(2)　$y'+y^2=\sin x$　✗

(3)　$yy'+xy=1$　✗

先看一阶线性齐次微分方程 $y' + p(x)y = 0$.

分离变量得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -p(x)\,\mathrm{d}x$$

两边同时积分，得到

$$\ln|y| = -\int p(x)\,\mathrm{d}x + C_0$$

消去对数，得到通解为（其中 $C = \pm \mathrm{e}^{C_0}$）

$$y = C\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

将 $y = u(x)\,\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ 代入 $y' + p(x)y = q(x)$.

$$\begin{aligned} y' &= u'(x)\,\mathrm{e}^{\int -p(x)\,\mathrm{d}x} + u(x)\left(\mathrm{e}^{\int -p(x)\,\mathrm{d}x}\right)' \\ &= u'(x)\,\mathrm{e}^{\int -p(x)\,\mathrm{d}x} - u(x)\,p(x)\,\mathrm{e}^{\int -p(x)\,\mathrm{d}x} \\ &= u'(x)\,\mathrm{e}^{\int -p(x)\,\mathrm{d}x} - p(x)y \end{aligned}$$

得到

$$u'(x)\,\mathrm{e}^{\int -p(x)\,\mathrm{d}x} = q(x)$$

即有

$$u'(x) = q(x)\,\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

将 $y = u(x)\,\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ 代入 $y' + p(x)y = q(x)$.

$$\begin{aligned} & u'(x) = q(x)\,\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} \\ \Rightarrow\ & u(x) = \int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C \\ \Rightarrow\ & y = \mathrm{e}^{\int -p(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right) \end{aligned}$$

上式即为一阶线性非齐次方程的通解公式.

例 **6.** 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{y}{x}=x^2$ 的通解.

解**.** 第一步，求相应的齐次方程的通解

$$y'-\frac{1}{x}y=0\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

易得 $\ln|y|=\ln|x|+c_1$, 故齐次方程的通解为 $y=cx$.

第二步，用常数变易法求非齐次方程的通解: 令 $y=u(x)x$, 则

$$y'=u'(x)x+u(x),$$

代入方程得

$$u'(x)x=x^2\Longrightarrow u'(x)=x.$$

因此 $u(x)=\dfrac{x^2}{2}+c$，从而所求通解为

$$y=\frac{x^3}{2}+cx.$$

例 **7.** 求方程 $y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{\sin x}{x}$ 的通解.

解**.** 由条件易知

$$P(x)=\frac{1}{x},\ Q(x)=\frac{\sin x}{x},$$

带入公式可得通解为

$$\begin{aligned}y&=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\left(\int\frac{\sin x}{x}\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)\\&=\mathrm{e}^{-\ln x}\left(\int\frac{\sin x}{x}\cdot\mathrm{e}^{\ln x}\,\mathrm{d}x+C\right)\\&=\frac{1}{x}\left(\int\sin x\,\mathrm{d}x+C\right)=\frac{1}{x}(-\cos x+C)\end{aligned}$$

例 **8.** 求方程 $\left(y^2-6x\right)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0$ 的通解.

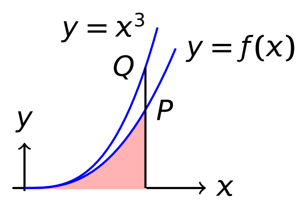
解**.** 方程化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{3}{y}x=-\frac{y}{2}$$

相对应于 x 及其导数而言, 是一阶线性微分方程, 故先求 $x(y)$. 其中 $P(y)=-\frac{3}{y}$, $Q(y)=-\frac{y}{2}$, 带入公式，即可得通解为

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{e}^{-\int P(y)\,\mathrm{d}y}\left(\int Q(y)\cdot \mathrm{e}^{\int P(y)\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y + C\right) \\ &= \mathrm{e}^{3\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y}\left(\int \left(-\frac{y}{2}\right)\cdot \mathrm{e}^{-3\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y + C\right) \\ &= \mathrm{e}^{3\ln y}\left(-\int \frac{y}{2}\cdot \mathrm{e}^{-3\ln y}\,\mathrm{d}y + C\right) \\ &= y^3\left(\frac{1}{2y}+C\right). \end{aligned}$$

例 **9.** 如图所示, 平行于 y 轴的动直线被曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^3(x\geq 0)$ 截下的线段 PQ 之长数值上等于阴影部分的面积, 求曲线 $f(x)$.



解**.** 由条件知 $\int_0^x f(x)\mathrm{d}x = x^3 - f(x)$ 即 $\int_0^x y\mathrm{d}x = x^3 - y$. 两边求导得 $y'+y=3x^2$, 解此微分方程得

$$y=\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x}\left[\int 3x^2\mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right] = C\mathrm{e}^{-x}+3x^2-6x+6$$

由 $y|_{x=0}=0$, 得 $C=-6$, 所求曲线为

$$y=3\left(-2\mathrm{e}^{-x}+x^2-2x+2\right).$$

1. 可分离变量微分方程 $f(x)\,\mathrm{d}x = g(y)\,\mathrm{d}y$
   - 两边积分得 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(y)\,\mathrm{d}y$
2. 齐次微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(\frac{y}{x})$
   - 标准化：将微分方程化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(\frac{y}{x})$
   - 换元：令 $v=\frac{y}{x}$，则有 $y=xv$，从而 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v$．代入原方程得到

$$x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v=f(v)$$

- 分离变量：得到 $\dfrac{\mathrm{d}v}{f(v)-v}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$
- 两边积分：得到通解，然后将 v 代回

3. 一阶线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ ($q(x)=0$ 称为一阶齐次线性微分方程, $q(x)\neq 0$ 称为一阶非齐次线性微分方程)

   - 先用变量分离法求 $y'+p(x)y=0$ 的解得 $y=C\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$.
   - 将 $y=u(x)\,\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ 代入 $y'+p(x)y=q(x)$.

   ....

$$
\begin{aligned}
&u'(x)=q(x)\,\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\\
\Rightarrow\ &u(x)=\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\\
\Rightarrow\ &y=\mathrm{e}^{\int -p(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)
\end{aligned}
$$

   上式即为一阶线性非齐次方程的通解公式.

10.3 一阶微分方程在经济学中的综合应用

例 **1.** 某商品的需求量 Q 对价格 P 的弹性为 $-P\ln 3$, 若该商品的最大需求量为 *1200 (*即 $P=0$ 时, $Q=1200$) *(* P 的单位为元, Q 的单位为 kg *)*.

(1) 试求需求量 Q 与价格 P 的函数关系*;*

(2) 求当价格为 *1* 元时, 市场对该商品的需求量*;*

(3) 当 $P\to+\infty$ 时, 需求量的变化趋势如何*?*

解**.** 由条件可知

$$\frac{P}{Q}\cdot\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=-P\ln 3\Longrightarrow\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=-Q\ln 3.$$

分离变量并求解此微分方程, 得

$$\frac{\mathrm{d}Q}{Q}=-\ln 3\ \mathrm{d}P\Longrightarrow Q=C\mathrm{e}^{-P\ln 3}\ (C\text{为任意常数}).$$

(1) 由 $Q|_{P=0}=1200$ 得, $C=1200$,

$$Q=1200\times 3^{-P}.$$

(2) 当 $P=1$ 元时, $Q=1200\cdot 3^{-1}=400(\text{ kg})$.

(3) 显然 $P\to+\infty$ 时, $Q\to 0$, 即随着价格的无限增大, 需求量将趋于零 (其数学上的意义为, $Q=0$ 是所给方程的平衡解, 且该平衡解是稳定的).

例 **2.** 设某商品的需求函数与供给函数分别为

$$\begin{cases} Q_d & =a-bP, \\ Q_s & =-c+dP \end{cases} \text{ (其中} a,b,c,d \text{ 均为正常数).}$$

假设商品价格 P 为时间 t 的函数, 已知初始价格 $P(0)=P_0$, 且在任一时刻 t, 价格 $P(t)$ 的变化率总与这一时刻的超额需求 Q_d-Q_s 成正比 (比例常数为 $k>0$).

(1) 求供需相等时的价格 P (均衡价格);

(2) 求价格 $P(t)$ 的表达式;

(3) 分析价格 $P(t)$ 随时间的变化情况.

解**.** *(1)* 由 $Q_{\mathrm{d}}=Q_{\mathrm{s}}$ 得 $P_{\mathrm{e}}=\frac{a+c}{b+d}$.

(2) 由题意可知

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=k\,(Q_d-Q_s)\quad (k>0).$$

将 $Q_d=a-bP, Q_s=-c+dP$ 代人上式, 得

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}+k(b+d)P=k(a+c).$$

解一阶非齐次线性微分方程, 得通解为

$$P(t)=C\mathrm{e}^{-k(b+d)t}+\frac{a+c}{b+d}$$

由 $P(0)=P_0$, 得

$$C=P_0-\frac{a+c}{b+d}=P_0-P_e$$

则特解为

$$P(t)=(P_0-P_e)\,\mathrm{e}^{-k\langle b+d\rangle t}+P_e.$$

(3) 讨论价格 $P(t)$ 随时间的变化情况.

由于 $P_0 - P_e$ 为常数, $k(b+d) > 0$, 故当 $t \to +\infty$ 时, $(P_0 - P_e)\,\mathrm{e}^{-k(b+d)t} \to 0$, 从而 $P(t) \to P_e$ (均衡价格) (从数学上讲, 显然均衡价格 P_e 即为微分方程的平衡解, 且由于 $\lim_{t\to+\infty} P(t) = P_e$, 故微分方程的平衡解是稳定的).

例 **3.** 某林区实行封山养林, 现有木材 *10* 万立方米, 如果在每一时刻 t 木材的变化率与当时木材数成正比. 假设 *10* 年时这林区的木材为 *20* 万立方米. 若规定, 该林区的木材量达到 *40* 万立方米时才可砍伐, 问至少多少年后才能砍伐?

解**.** 若时间 t 以年为单位, 假设任一时刻 t 木材的数量为 $P(t)$ 万立方米, 由题意可知,

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP \quad (k \text{ 为比例常数})$$

且 $P|_{t=0} = 10, P|_{t=10} = 20.$ 该方程的通解为

$$P = C\mathrm{e}^{kt},$$

将 $t = 0$ 时, $P = 10$ 代人, 得 $C = 10$, 故

$$P = 10\mathrm{e}^{kt},$$

再将 $t = 10$ 时, $P = 20$ 代人, 得 $k = \frac{\ln 2}{10}$, 于是

$$P = 10e^{\frac{\ln 2}{10}t} = 10 \cdot 2^{\frac{1}{10}},$$

要使 $P = 40$, 则 $t = 20.$ 故至少 *20* 年后才能砍伐.

例 **4.** 某商场的销售成本 y 和存贮费用 S 均是时间 t 的函数, 随时间 t 的增长, 销售成本的变化率等于存贮费用的倒数与常数 *5* 的和, 而贮存费用的变化率为存贮费用的 $\left(-\frac{1}{3}\right)$ 倍. 若当 $t = 0$ 时, 销售成本 $y = 0$, 存贮费用 $S = 10.$ 试求销售成本与时间 t 的函数关系及存贮费用与时间 t 的函数关系.

解**.** 由条件知

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{S} + 5, \tag{10.3.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{3}S \tag{10.3.2}$$

解微分方程 (10.3.2) 得

$$S = Ce^{-\frac{t}{3}}.$$

由 $S|_{t=0} = 10$ 得 $C = 10$, 故存财费用与时间 t 的函数关系为

$$S = 10e^{-\frac{1}{3}},$$

将上式代人微分方程 (10.3.1), 得

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{10}e^{\frac{1}{3}} + 5$$

从而

$$y = \frac{3}{10}e^{\frac{t}{3}} + 5t + C_1,$$

由 $y|_{t=0} = 0$, 得 $C_1 = -\frac{3}{10}$. 从而销售成本与时间 t 的函数关系为

$$y = \frac{3}{10}e^{\frac{t}{3}} + 5t - \frac{3}{10}.$$

掌握一类经济问题建立数学模型的方法:

1. 理解函数关系;
2. 建立微分方程;
3. 确定初始条件;
4. 求解.

10.4　二阶常系数线性微分方程

在实际中应用得较多的一类高阶微分方程是二阶常系数线性微分方程, 它的一般形式是

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

其中 p, q 为实常数, $f(x)$ 为 x 的已知函数. 当方程右端 $f(x) \equiv 0$ 时, 方程叫做齐次的; 当 $f(x) \equiv 0$ 时, 方程叫做非齐次的.

研究二阶常系数齐次线性微分方程: $y'' + py' + qy = 0$

. . . .

定理 1. 如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是二阶常系数齐次线性微分方程的两个解, 则 $y = C_1y_1 + C_2y_2$ 也是方程的解. (C_1, C_2 是任意常数)

问题 1. 问题：$y = C_1y_1 + C_2y_2$ 一定是通解吗?

研究二阶常系数齐次线性微分方程：$y'' + py' + qy = 0$

. . . .

定义 1. 若在区间 I 上, $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} = u(x) \neq$ 常数, 则函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 在区间 I 上线性无关.

定理 2. 如果函数 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶常系数齐次线性微分方程的两个线性无关的特解, 则 $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ (其中 C_1, C_2 为任意常数) 是方程的通解.

例 1. $y = c_1\cos x + c_2 sinx$ 是 $y'' + y = 0$ 的通解.

研究二阶常系数齐次线性微分方程：$y'' + py' + qy = 0$

. . . .

例 2. 求微分方程 $y'' + 4y' + 3y = 0$ 的通解.

1. 恒等变形：得 $(y'' + y') + 3(y' + y) = 0$
2. 变量代换：令 $z = y' + y$，则 $z' + 3z = 0$
3. 求解方程：得 $z = Ce^{-3x}$，即 $y' + y = Ce^{-3x}$
4. 求解方程：得 $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$

研究二阶常系数齐次线性微分方程：$y'' + py' + qy = 0$

. . . .

例 3. 求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解.

1. 恒等变形：得 $(y'' + 2y') + 2(y' + 2y) = 0$
2. 变量代换：令 $z = y' + 2y$，则 $z' + 2z = 0$

3. 求解方程：得 $z=Ce^{-2x}$，即 $y'+2y=Ce^{-2x}$
4. 求解方程：得 $y=(C_1+C_2x)\,e^{-2x}$

研究二阶常系数齐次线性微分方程：$y''+py'+qy=0$

1. 恒等变形：得 $(y''-ay')-b(y'-ay)=0$
2. 变量代换：令 $z=y'-ay$，则 $z'-bz=0$
3. 求解方程：得 $z=Ce^{bx}$，即 $y'-ay=Ce^{bx}$
4. 求解方程：得 $y=e^{ax}\left(\int Ce^{(b-a)x}\,dx+C'\right)$
   - 当 $a\neq b$ 时，$y=C_1\,e^{ax}+C_2\,e^{bx}$
   - 当 $a=b$ 时，$y=(C_1+C_2x)e^{ax}$

问题. 常数 a 和 b 是否一定存在？如何求出它？

解法. a 和 b 是方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的两个根.

研究二阶常系数线性齐次方程：$y''+py'+qy=0$.

....

设其特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的两个根为 λ_1 和 λ_2.

1. 若 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 为相异实根，则方程的通解为
$$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$$
2. 若 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ 为相同实根，则方程的通解为
$$y=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}$$
3. 若 $\lambda_1=\alpha+i\beta,\lambda_2=\alpha-i\beta$ 为共轭复根，则方程的通解为
$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

例 **4.** 求方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解.

解. 微分方程的特征方程为

$$\lambda^2+2\lambda+5=0,$$

解得 $\lambda_{1,2}=-1\pm 2i$, 故所求通解为

$$y=\mathrm{e}^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$$

例 **5.** 求微分方程 $y''-2y'-8y=0$ 的通解

解. 微分方程的特征方程为

$$\lambda^2-2\lambda-8=(\lambda-4)(\lambda+2)=0.$$

解得 $\lambda_1=4,\lambda_2=-2$. 故所求通解为

$$y=c_1\mathrm{e}^{4x}+c_2\mathrm{e}^{-2x}$$

练习 **1.** 求方程 $y''+4y'+4y=0$ 的通解.

答案. 微分方程的特征方程为

$$\lambda^2+4\lambda+4=0,$$

解得 $\lambda_1=\lambda_2=-2$, 故所求通解为

$$y=(C_1+C_2x)\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

定理 **3.** 设 y^* 是二阶非齐次线性方程

$$y''+py'+qy=f(x), \tag{10.4.1}$$

的一个特解, Y 是与 (10.4.1) 对应的齐次方程的通解, 那么 $y=Y+y^*$ 是二阶非齐次线性微分方程 (10.4.1) 的通解.

定理 **4.** 设 y_1,y_2 是非齐次方程 (10.4.1) 的解, 那么 y_1-y_2 就是非齐次方程 (10.4.1) 所对应的齐次方程的解.

定理 **5.** 设二阶常系数非齐次线性微分方程的右端 $f(x)$ 是几个函数之和, 如

$$y''+py'+qy=f_1(x)+f_2(x), \tag{10.4.2}$$

而 y_1^* 与 y_2^* 分别是方程

$$y''+py'+qy=f_1(x)$$

与

$$y''+py'+qy=f_2(x)$$

的特解, 则 $y_1^*+y_2^*$ 就是原方程 (10.4.2) 的特解.

二阶常系数齐次线性微分方程：$y''+py'+qy=0$ 的通解.

. . . .

设其特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ 的两个根为 λ_1 和 λ_2.

1. 若 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 为相异实根，则方程的通解为:
$$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$$
2. 若 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ 为相同实根，则方程的通解为
$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{\lambda x}$$
3. 若 $\lambda_1=\alpha+i\beta,\lambda_2=\alpha-i\beta$ 为共轭复根，则方程的通解为
$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$
4. 二阶常系数非齐次线性微分方程解的结构.

10.5　差分与差分方程

10.5.1　差分

设函数 $y=f(x)$, 并将数列 $f(0),f(1),\cdots,f(x),f(x+1),\cdots$ 简记为 $y_0,y_1,\cdots,y_x,y_{x+1},\cdots$

定义 **1.** 对于数列 y_x（$x=0,1,2,\cdots$），称
$$\Delta y_x=y_{x+1}-y_x$$
为 y_x 的（一阶）差分；称一阶差分的差分
$$\Delta^2y_x=\Delta(\Delta y_x)=\Delta y_{x+1}-\Delta y_x$$
为 y_x 的二阶差分.

类似地，可以定义三阶、四阶.... 差分.

注记 **1.** 称二阶及二阶以上的差分为高阶差分.

例 **1.** 求 $\Delta\left(x^2\right),\Delta^2\left(x^2\right),\Delta^3\left(x^2\right)$

解. 设 $y=x^2$, 则

$$
\begin{aligned}
\Delta y_x &= \Delta\left(x^2\right)=(x+1)^2-x^2=2x+1. \\
\Delta^2 y_x &= \Delta^2\left(x^2\right)=\Delta(2x+1) \\
&= [\,2(x+1)+1]-(2x+1)=2. \\
\Delta^3 y_x &= \Delta^3\left(x^2\right)=2-2=0.
\end{aligned}
$$

例 **2.** 求下列函数的差分

(1) $y=\log_a x$; *(2)* $y=\sin ax$

解. 由差分的定义易得

$$
\begin{aligned}
\text{(1) } \Delta y_x &= y_{x+1}-y_x \\
&= \log_a(x+1)-\log_a x \\
&= \log_a\left(1+\frac{1}{x}\right) \\
\text{(2) } \Delta y_x &= \sin a(x+1)-\sin ax \\
&= 2\cos a\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\sin\frac{a}{2}.
\end{aligned}
$$

例 **3.** 求 $y=x!$ 的一阶差分, 二阶差分.

解. 由条件易得

$$
\begin{aligned}
\Delta y_x &= y_{x+1}-y_x \\
&= (x+1)!-x! \\
&= x\cdot x! \\
\Delta^2 y_x &= \Delta(\Delta y_x)=\Delta(x\cdot x!) \\
&= (x+1)\cdot(x+1)!\cdot - x\cdot x! \\
&= \left(x^2+x+1\right)x!
\end{aligned}
$$

例 **4.** 设 $y=x^{(n)}=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$, $x^{(0)}=1$, 求 Δy_x(即 $\Delta\left(x^{(n)}\right)$).

解. 由条件可得

$$
\begin{aligned}
\Delta y_x &= (x+1)^{(n)} - x^{(n)} \\
&= (x+1)x(x-1)\cdots\cdots(x+1-n+1) - x(x-1) \\
&\quad \cdots\cdot(x-n+2)(x-n+1) \\
&= [(x+1)-(x-n+1)]x(x-1)\cdots(x-n+2) \\
&= nx^{(n-1)} \qquad \text{(公式)}
\end{aligned}
$$

性质. 差分具有以下性质:

1. $\Delta(cy_x) = c\Delta y_x$
2. $\Delta(y_x \pm z_x) = \Delta y_x \pm \Delta z_x$
3. $\Delta(y_x z_x) = y_x \Delta z_x + z_{x+1}\Delta y_x = z_x \Delta y_x + y_{x+1}\Delta z_x$
4. $\Delta\left(\dfrac{y_x}{z_x}\right) = \dfrac{z_x \Delta y_x - y_x \Delta z_x}{z_x z_{x+1}} = \dfrac{z_{x+1}\Delta y_x - y_{x+1}\Delta z_x}{z_x z_{x+1}}$

证明. 这里仅给出 (3) 式的证明

$$
\begin{aligned}
\Delta(y_x \cdot z_x) &= y_{x+1} z_{x+1} - y_x \cdot z_x \\
&= y_{x+1} \cdot z_{x+1} - y_{x+1} z_x + y_{x+1} z_x - y_x z_x \\
&= y_{x+1}(z_{x+1} - z_x) + z_x(y_{x+1} - y_x) \\
&= y_{x+1} \cdot \Delta z_x + z_x \cdot \Delta y_x.
\end{aligned}
$$

类似可证 $\Delta(y_x \cdot z_x) = y_x \cdot \Delta z_x + z_{x+1} \cdot \Delta y_x$.

例 **5.** 设 $y = x^3$, 求 $\Delta^3 y_x$.

提示. 注意 $\Delta x^{(n)} = nx^{(n-1)}$, 且

$$
\begin{aligned}
y = x^3 &= x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x \\
&= x^{(3)} + 3x^{(2)} + x^{(1)}
\end{aligned}
$$

解. 由条件及公式 $\Delta x^{(n)} = nx^{(n-1)}$, 易得

$$\begin{aligned}\Delta^3 y_x &= \Delta\Delta(\Delta y_x)\\ &= \Delta\Delta\left(\Delta x^{(3)} + 3\Delta x^{(2)} + \Delta x^{(1)}\right)\\ &= \Delta\Delta\left[3x^{(2)} + 6x^{(1)} + x^{(0)}\right]\\ &= \Delta\left[3\Delta x^{(2)} + 6\Delta x^{(1)} + \Delta 1\right] = 6\Delta x^{(1)} + 6\Delta x^{(0)} = 6.\end{aligned}$$

例 **6.** 设 $y = \mathrm{e}^{2x}$, 求 $\Delta^2 y_x$.

解. 由条件易得

$$\begin{aligned}\Delta y_x &= y_{x+1} - y_x\\ &= \mathrm{e}^{2(x+1)} - \mathrm{e}^{2x}\\ &= \mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^2 - 1\right)\\ \Delta^2 y_x &= \Delta(\Delta y_x) = \Delta\left[\mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^2 - 1\right)\right]\\ &= \left(\mathrm{e}^2 - 1\right)\Delta \mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^2 - 1\right)^2\end{aligned}$$

10.5.2 差分方程

定义. 形如

$$F(x, y_x, \Delta y_x, \Delta^2 y_x, \cdots, \Delta^n y_x) = 0$$

的方程称为差分方程.

例 **7.** 说明下面两个方程是等价的:

- $\Delta^2 y_x - 2y_x = 3^x$
- $y_{x+2} - 2y_{x+1} - y_x = 3^x$

定义. 形如

$$F(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \cdots, y_{x+n}) = 0,$$

的方程称为差分方程. *(含有下标的 y 至少要有两个)*

定义. 差分方程中未知数列下标的最大值和最小值的差，称为该差分方程的阶.

例 **8.** $y_{x+2}-y_{x+1}=x$ 为一阶差分方程.

例 **9.** $y_{x+2}=y_{x+1}+y_x$ 为二阶差分方程.

注记 **2.** 差分方程的不同定义形式之间可以相互转换.

例 **10.** 下列等式是差分方程的有 *( )*.

(1) $2\Delta y_x=y_x+x$ *(2)* $-3\Delta y_x=3y_x+a^x$

(3) $\Delta^2 y_x=y_{x+2}-2y_{x+1}+y_x$ *(4)* $y_x-2y_{x-1}+3y_{x-2}=4$

解**.** 由差分方程的定义有：(1), (4) 是差分方程.

(2) 的左端 $-3\Delta y_x=-3(y_{x+1}-y_x)=-3y_{x+1}+3y_x$, 则等式实为 $-3y_{x+1}=a^x$, 仅含一个时期的函数值 y_{x+1}, 故不是差分方程.

(3) 的左端 $\Delta^2 y_x=\Delta(y_{x+1}-y_x)=\Delta y_{x+1}-\Delta y_x=y_{x+2}-2y_{x+1}+y_x$ 恰好等于右端, 故不是差分方程.

确定下列方程的阶

(1) $y_{x+3}-x^2y_{x+1}+3y_x=2$ (2) $y_{x-2}-y_{x-4}=y_{x+2}$

(3) $\Delta^3 y_x+y_x+1=0$

解**.** *(1)* 因为 $x+3-x=3$, 故为三阶差分方程;

(2) 因为 $x+2-(x-4)=6$，故为是六阶差分方程.

(3) 方程可以转化为 $y_{x+3}-3y_{x+2}+3y_{x+1}+1=0$, 因此是二阶差分方程.

定义 **2.** 如果一个数列代入差分方程后，方程两边恒等，则称此数列为该差分方程的解.

- 满足一定的初始条件的解称为特解.
- 含有 n 个相互独立的任意常数的解称为 n 阶差分方程的通解.

例 **11.** 一阶差分方程 $y_{x+1}-y_x=2$, $y_0=1$ 有特解为 $y_x=2x+1$.

例 **12.** 二阶差分方程 $y_{x+2}-3y_{x+1}+2y_x=0$ 的通解为 $y_x=C_1+C_2 2^x$.

10.5.3 常系数线性差分方程解的结构

n 阶常系数线性差分方程的一般形式为

$$y_{x+n}+a_1y_{x+n-1}+\cdots+a_{n-1}y_{x+1}+a_ny_x=f(x),$$

其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为常数, 且 $a_n\neq 0$, $f(x)$ 为已知函数.

当 $f(x)\equiv 0$ 时差分方程称为齐次的;

当 $f(x)\neq 0$ 时差分方程称为非齐次的.

定理 **1.** 如果函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_k(x)$ 是方程

$$y_{x+n}+a_1y_{x+n-1}+\cdots+a_{n-1}y_{x+1}+a_ny_x=0,$$

的 k 个解, 则

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ky_k$$

也是方程的解. ($C_1,C_2,\cdots,C_k$ 是任意常数)

问题 **1.** 若 $k=n$, 则 $y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ky_k$ 一定是通解吗?

定义 **3.** 设有 n 个函数 $y_1(x),\cdots,y_n(x)$ 都在某一区间 I 上有定义, 若存在一组不全为零的数 $k_1,\cdots,k_n$ 使对一切 $x\in I$, 有

$$k_1y_1+\cdots+k_ny_n=0,$$

则称函数 $y_1,\cdots,y_n$ 在区间 I 上线性相关, 否则, 称之为线性无关.

定理 **2.** 若函数 $y_1(x),\cdots,y_n(x)$ 是 n 阶常系数齐次线性差分方程的 n 个线性无关的解, 则

$$Y_x=C_1y_1(x)+\cdots+C_ny_n(x)$$

就是方程的通解, 其中 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 为常数.

注记**.** 要求 n 阶常系数齐次差分方程的通解，只需要求出其 n 个线性无关的特解即可.

定理 **3.** 若 y_x^* 是非齐次方程

$$y_{x+n}+a_1y_{x+n-1}+\cdots+a_{n-1}y_{x+1}+a_ny_x=f,\ f(x)\not\equiv 0$$

的一个特解,Y_x 是它对应的齐次方程

$$y_{x+n}+a_1y_{x+n-1}+\cdots+a_{n-1}y_{x+1}+a_ny_x=0$$

的通解, 则非齐次方程的通解为

$$y_x=Y_x+y_x^*\ .$$

注记**.** 要求出 n 阶常系数非齐次线性差分方程的通解，只需求出一个特解和它对应的齐次差分方程的通解即可.

定理 **4.** 若 y_1^*, y_2^* 分别是非齐次方程

$$y_{x+n}+a_1y_{x+n-1}+\cdots+a_{n-1}y_{x+1}+a_ny_x=f_1(x),$$

$$y_{x+n}+a_1y_{x+n-1}+\cdots+a_{n-1}y_{x+1}+a_ny_x=f_2(x)$$

的特解, 则 $y^*=y_1^*+y_2^*$ 是方程

$$y_{x+n}+a_1y_{x+n-1}+\cdots+a_{n-1}y_{x+1}+a_ny_x=f_1(x)+f_2(x)$$

的特解.

本节主要内容

1. 差分的定义
2. 差分方程与差分方程的阶
3. 差分方程的解、定解条件和通解
4. 常系数线性差分方程解的结构

10.6 一阶常系数线性差分方程

研究一阶常系数齐次线性差分方程 $y_{x+1}-ay_x=0$.

....

迭代法：假设 y_0 已知，则有

1. $y_1=ay_0$,
2. $y_2=ay_1=a^2y_0$,
3. $y_3=ay_2=a^3y_0$
4. ......

5. $y_x = a^x y_0$, 令 $C = y_0$ 为任意常数，即得方程的通解 $Y_x = Ca^x$.

例 **1.** 求 $2y_{x+1} + y_x = 0$ 的通解.

解. 因为 $a = -\frac{1}{2}$，故差分方程的通解为 $Y_x = C\left(-\frac{1}{2}\right)^x$.

研究一阶常系数齐次线性差分方程 $y_{x+1} - ay_x = 0$.

....

特征根法: 方程可变形为 $\Delta y_x + (1-a)y_x = 0$, 且 $\Delta\lambda^x = (\lambda-1)\lambda^x$, 故可设 $y_x = \lambda^x$ $(\lambda \neq 0)$,

1. 将 $y_x = \lambda^x$ 代入方程得 $\lambda^{x+1} - a\lambda^x = 0$, 可得 $\lambda = a$,
2. 于是 $y_x = a^x$ 是一个特解,
3. 又方程的是一阶的，故齐次方程的通解为 $Y_x = Ca^x$.

例 **2.** 求 $2y_{x+1} + y_x = 0$ 的通解.

解. 由特征方程 $2\lambda + 1 = 0$ 可得特征根为 $\lambda = -\frac{1}{2}$，故差分方程的通解为 $Y_x = C\left(-\frac{1}{2}\right)^x$.