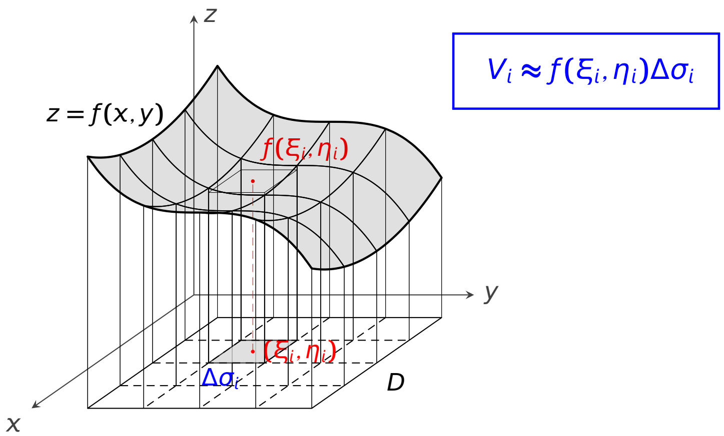
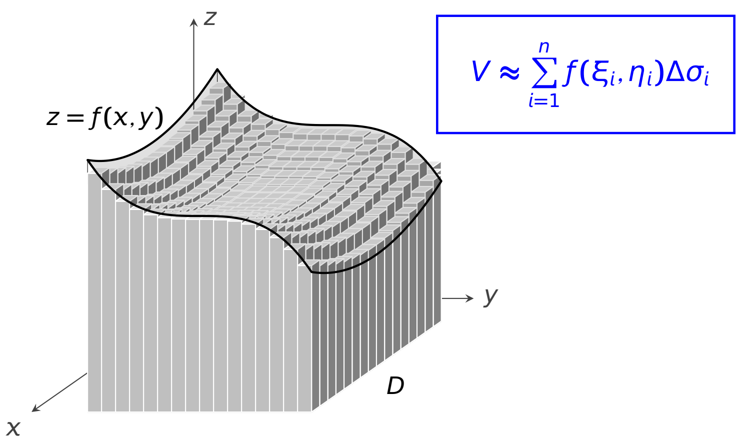
目录

第九章　二重积分

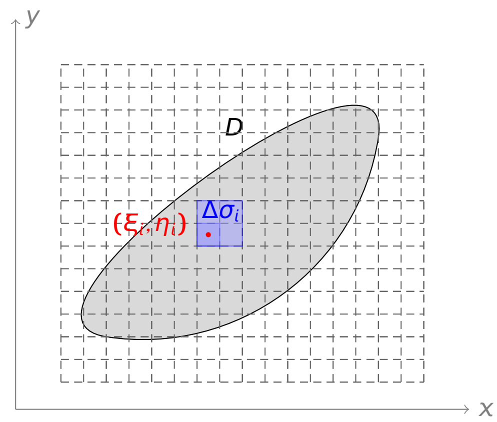
9.1　二重积分

9.1.1　二重积分的概念和性质





定义二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$



- D 是有界闭区域
- $f(x,y)$ 定义在 D 上
- 任意划分 $D = \bigcup\limits_i D_i$
- 任取点 $(\xi_i,\eta_i)\in D_i$

定义二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

定义 **1.** 设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数. 将闭区域 D 任意分成 n 个小闭区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n,$$

其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域, 也表示它的面积. 在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 $(\xi_i,, \eta_i)$, 作乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i (i=1,2,\cdots,n)$, 并作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$. 如果当各小闭区域的直径中的最大值 λ 趋于零时, 和的极限总存在, 则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的二重积分, 记作 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$, 即

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

在二重积分的记号 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 中：

- D 称为积分区域
- $f(x,y)$ 称为被积函数
- $\mathrm{d}\sigma$ 称为面积元素

定理**.** 若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 存在**.**

1. 对二重积分定义的说明：
   - 在二重积分的定义中, 对闭区域的划分是任意的.
   - 当 $f(x,y)$ 在闭区域上连续时，定义中和式的极限必存在, 即二重积分必存在.
2. 二重积分的几何意义:
   - 当被积函数大于零时，二重积分是柱体的体积.
   - 当被积函数小于零时，二重积分是柱体的体积的负值.

在直角坐标系下用平行于坐标轴的直线网来划分区域 D, 则面积元素为

$$\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故二重积分可写为 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$

性质 **1** (函数可加性)**.**

$$\iint\limits_D \left[af(x,y)+bg(x,y)\right]\mathrm{d}\sigma$$

$$= a\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma + b\iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

性质 **2** (区域可加性)**.** 设积分区域 D 可以划分为 D_1 和 D_2，则有

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

性质 **3.** 如果在 D 上有 $f(x,y)\geq g(x,y)$，则有

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \geq \iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

性质 **4.** 如果在 D 上有 $f(x,y)\equiv 1$，D 的面积为 A，则有

$$\iint\limits_D 1\,\mathrm{d}\sigma = A$$

性质 **5** (积分估值不等式)**.** 设在 D 上 $m\leq f(x,y)\leq M$，D 的面积为 A，则有

$$mA\leq \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \leq MA$$

性质 **6** (积分中值定理)**.** 如果 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，D 的面积为 A，则在 D 中至少存在一点 (ξ,η)，使得

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)A$$

例 **1.** 不作计算, 估计 $I=\iint\limits_D \mathrm{e}^{\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}\sigma$ 的值, 其中 D 是椭圆闭区域：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leq 1$ $(0<b<a)$.

解**.** 区域 D 的面积 $\sigma = ab\pi$, 在区域 D 上，$0\leq x^2+y^2\leq a^2$, 从而 $1=\mathrm{e}^0\leq \mathrm{e}^{x^2+y^2}\leq \mathrm{e}^{a^2}$, 由积分估值不等式得

$$\sigma\leq \iint\limits_D \mathrm{e}^{\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}\sigma \leq \sigma\cdot \mathrm{e}^{a^2},$$

即

$$ab\pi\leq \iint\limits_D \mathrm{e}^{\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}\sigma\leq ab\pi\mathrm{e}^{a^2}$$

例 **2.** 估计 $I=\iint\limits_D \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$ 的值, 其中 $D: 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 2$.

解**.** 由条件易知，区域面积 $\sigma=2$，

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{(x+y)^2+16}},$$

, 在 D 上 $f(x,y)$ 的最大值和的最小值分别为：

$$M=\frac{1}{4}(x=y=0),\ m=\frac{1}{5}\ (x=1,y=2)$$

故

$$\frac{2}{5}\leq I\leq\frac{2}{4}.$$

例 **3.** 判断 $\displaystyle\iint\limits_{r\leq|x|+|y|\leq1}\ln\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的符号.

解**.** 当 $r\leq|x|+|y|\leq1$ 时,

$$0<x^2+y^2\leq\left(|x|+|y|\right)^2\leq1,$$

故

$$\ln\left(x^2+y^2\right)\leq0,$$

又当 $|x|+|y|<1$ 时,

$$\ln\left(x^2+y^2\right)<0,\ \Longrightarrow\iint\limits_{r\leq|x|+|y|\leq1}\ln\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<0.$$

9.1.2　小结

1. 二重积分的定义（和式的极限）
2. 二重积分的几何意义 (曲顶柱体的体积)
3. 二重积分的性质

9.2　二重积分的计算

二重积分的计算可以按照定义来进行，同定积分按照定义进行计算一样，能够按照定义进行计算的二重积分很少，对少数特别简单的被积函数和积分区域来说是可行的，但对于一般的函数和积分区域却不可行.

本节介绍一种计算二重积分的方法——把二重积分转化为两次定积分 (下称累次积分) 的计算.

9.2.1 用直角坐标计算二重积分

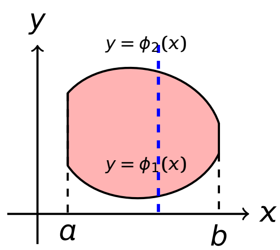
在直角坐标中，我们有 $d\sigma = dx\,dy$，从而有

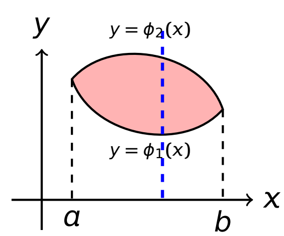
$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

如果区域 D 由直线 $x=a$ 和 $x=b$，以及曲线 $y=\phi_1(x)$ 和 $y=\phi_2(x)$ 围成，我们称 D 为 X-型区域, 其中 $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ 连续.

即 X-型区域可以表示为：

$$D = \left\{(x,y)\middle| a \le x \le b, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\right\}$$





如果积分区域 D 为 X-型区域，即有

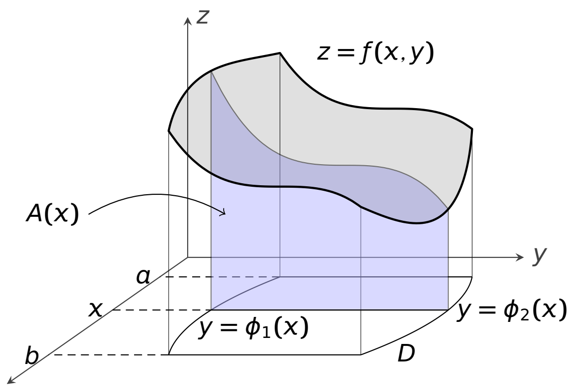
$$D = \left\{(x,y)\middle| a \le x \le b, \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x)\right\}$$

二重积分可以用下面公式来计算：

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx$$

$$:= \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

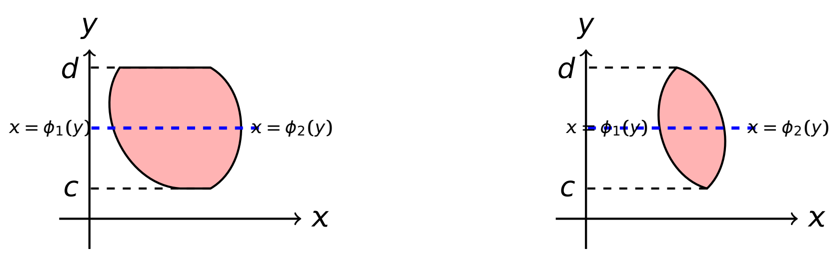
$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = \int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx$$



如果区域 D 由直线 $y=c$ 和 $y=d$，以及曲线 $x=\phi_1(y)$ 和 $x=\phi_2(y)$ 围成，我们称 D 为 Y-型区域, 其中 $\phi_1(y)$, $\phi_2(y)$ 连续.

即 Y-型区域可以表示为：

$$D=\left\{(x,y)\middle| c\le y\le d, \phi_1(y)\le x\le \phi_2(y)\right\}$$



如果积分区域 D 为 Y-型区域，即有

$$D=\left\{(x,y)\middle| c\le y\le d, \phi_1(y)\le x\le \phi_2(y)\right\}$$

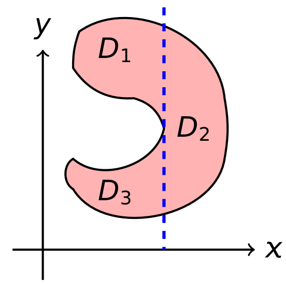
二重积分可以用下面公式来计算：

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_c^d\left[\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$:=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

X-型区域的特点： 穿过区域且平行于 y 轴的直线与区域边界相交不多于两个交点.

Y-型区域的特点： 穿过区域且平行于 x 轴的直线与区域边界相交不多于两个交点.



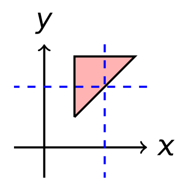
若区域如图, 则必须分割. 在分割后的三个区域上分别使用积分公式

$$\iint_D = \iint_{D_1} + \iint_{D_2} + \iint_{D_3}$$

利用直角坐标系计算二重积分的步骤

1. 画出积分区域的图形, 求出边界曲线交点坐标;
2. 根据积分域类型, 确定积分次序; 分割区域: X-型区域, 先 y 后 x; Y-型区域先 x 后 y;
3. 确定积分限, 化为累次积分; 后积先定限, 域中穿根线, 先交是下限, 后交上限见
4. 计算两次定积分, 即可得出结果.

二重积分转化为二次定积分时, 关键在于正确确定积分限, 一定要做到熟练、准确.



例 **1.** 求 $I = \iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是 $x=1$ 、$y=x$ 及 $y=2$ 所围成的闭区域.

解. 把区域看成 X-型区域, 则

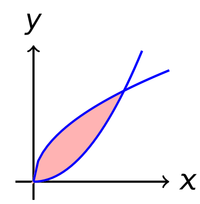
$$I = \int_1^2 \mathrm{d}x \int_x^2 xy\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \left[x\cdot\frac{y^2}{2}\right]_x^2 \mathrm{d}x$$
$$= \int_1^2 \left(2x - \frac{x^3}{2}\right)\mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{x^4}{8}\right]_1^2 = \frac{9}{8}.$$

解. 把区域看成 Y-型区域, 则

$$I = \int_1^2 \mathrm{d}y \int_1^y xy\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left[y\cdot\frac{x^2}{2}\right]_1^y \mathrm{d}y$$
$$= \int_1^2 \left(\frac{y^3}{2} - \frac{y}{2}\right)\mathrm{d}y = \left[\frac{y^4}{8} - \frac{y^2}{4}\right]_1^2 = \frac{9}{8}.$$

注记. 如果积分区域既是 X-型又是 Y-型区域，则两种方式计算结果一样，但可以做出适当选择

例 **2.** 求 $\iint\limits_D (x^2+y)\,dx\,dy$, 其中 D 是由抛物线 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 所围平面闭区域.



解. 先求两条曲线的交点，

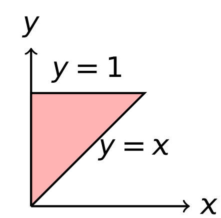
$$\begin{cases} y=x^2 \\ x=y^2 \end{cases} \Rightarrow (0,0),\ (1,1),\ ,$$

于是

$$\iint\limits_D (x^2+y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y)\,dy$$

$$= \int_0^1 \left[x^2\left(\sqrt{x}-x^2\right)+\frac{1}{2}\left(x-x^4\right)\right] dx = \frac{33}{140}.$$

例 **3.** 求 $I=\iint\limits_D e^{-y^2}d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y=x, y=1$ 及 y 轴所围成的闭区域.



解. 由于 $\int e^{-y^2}dy$ 不能用初等函数计算, 因此只能用 Y-型区域的求积公式进行计算.

$$I=\int_0^1 dy\int_0^y e^{-y^2}dx$$

$$=\int_0^1 ye^{-y^2}dy=\frac{1}{2}\left(1-e^{-1}\right).$$

计算二重积分时, 恰当的选取积分次序十分重要, 它不但关系到计算的繁简, 而且关系到是能否进行计算.

凡遇如下形式积分：

$$\boxed{\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,\ \int \sin x^2\,\mathrm{d}x,\ \int \cos x^2\,\mathrm{d}x,\ \int \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x,\ \int \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x,\ \int \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}x,\ \int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x},}$$

等等, 一定要放在后面进行积分.

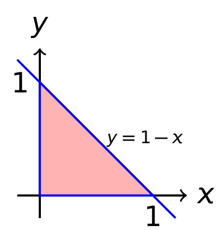
交换积分次序的步骤：

1. 将已给的二次积分的积分限得出相应的二重积分的积分区域, 并画出草图;
2. 按相反顺序写出相应的二次积分.

例 **4.** 改变积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y$ 的次序.

解**.** 积分区域显然为

$$D:\begin{cases}0\le x\le 1,\\ 0\le y\le 1-x.\end{cases}$$



如图所示，可以看作为 Y-型区域

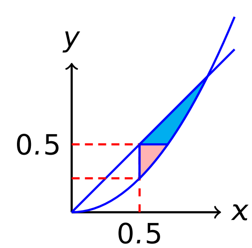
$$D:\begin{cases}0\le x\le 1-y,\\ 0\le y\le 1.\end{cases}$$

因而

$$原式 = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

例 **5.** 计算积分 $I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}y \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathrm{d}y \int_{y}^{\sqrt{y}} \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}x.$

解**.** 因为 $\int \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}x$ 不能用初等函数表示, 因此先改变积分次序.

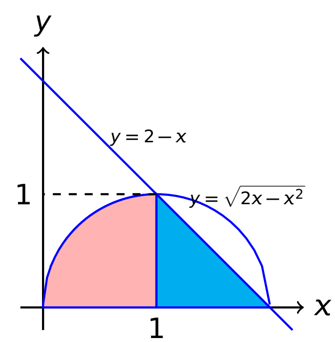


$$\begin{aligned}原式 &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} x\,(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{x})\,\mathrm{d}x = \frac{3}{8}\mathrm{e} - \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

例 **6.** 改变积分

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y$$

的次序.

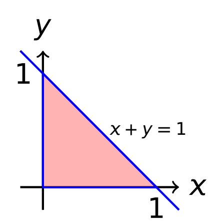


解**.** 积分区域如图所示, 因而

$$\text{原式} = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

$$V = \iint_D [f_2(x,y) - f_1(x,y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

例 **7.** 求由下列曲面所围成的立体体积, $z = x + y$, $z = xy$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.



解**.** 立体在 xoy 平面上的投影为:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ x + y = 1, \end{cases}$$

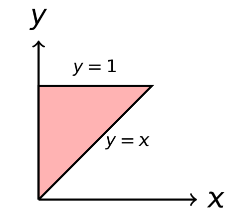
所围成的图形 (如图所示).

显然投影区域内 $x + y \geq xy$，故所求体积为

$$V = \iint_D (x + y - xy)\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} (x + y - xy)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \left[x(1-x) + \frac{1}{2}(1-x)^3\right] \mathrm{d}x = \frac{7}{24}.$$

思考. 求 $\iint\limits_D x^2 e^{-y^2}\,dx\,dy$, 其中 D 是以 $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ 为顶点的三角形.



解. 因为 $\int e^{-y^2}\,dy$ 无法用初等函数表示, 因此转化为累次积分时必须考虑次序. 于是

$$\begin{aligned}\iint_D x^2 e^{-y^2}\,dx\,dy &= \int_0^1 dy \int_0^y x^2 e^{-y^2}\,dx \\ &= \int_0^1 e^{-y^2}\cdot\frac{y^3}{3}\,dy = \int_0^1 e^{-y^2}\cdot\frac{y^2}{6}\,dy^2 \\ &= \frac{1}{6}\left(1-\frac{2}{e}\right).\end{aligned}$$

9.2.2 用极坐标计算二重积分

从 这 里 向 南 走 2000 米!

请分析上面这句话，告诉了我们什么信息?

这里： 出发点

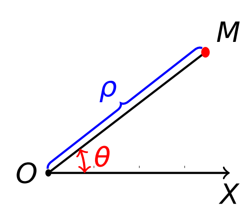
向南： 方向

2000 米： 距离

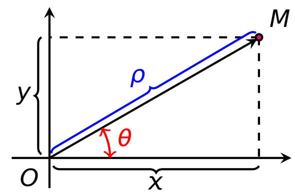
在生活中我们经常用距离和方向来表示一点的位置. 用距离和方向表示平面上一点的位置，就是极坐标.

极坐标的建立

1. 在平面内取一个定点 O，叫做极点.
2. 引一条射线 OX，叫做极轴.
3. 再选定一个长度单位和角度正方向（通常取逆时针方向）.



对于平面上任意一点 M，用 ρ 表示线段 OM 的长度，用 θ 表示从 OX 到 OM 的角度，ρ 叫做 M 的极径，θ 叫做点 M 的极角，有序数对 (ρ, θ) 就叫做 M 的极坐标.



直角坐标 (x, y) 和极坐标 (ρ, θ) 的关系为

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

直角坐标曲线方程转化为极坐标曲线方程:

$$y = f(x) \Longrightarrow \rho\sin\theta = f(\rho\cos\theta) \overset{\text{解出}\rho}{\Longrightarrow} \rho = g(\theta)$$

例 **8.** 将直线 $y = 3x + 2$ 用极坐标下的方程表示.

解. $\rho\sin\theta = 3\rho\cos\theta + 2 \Longrightarrow \rho = \dfrac{2}{\sin\theta - 3\cos\theta}$

例 **9.** 将圆 $x^2 + y^2 = 1$ 用极坐标系下的方程表示.

解. $\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta = 1 \Longrightarrow \rho = 1$

练习 **1.** 将抛物线 $y = x^2$ 用极坐标系下的方程表示.

答案. $\rho\sin\theta = \rho^2\cos^2\theta \Longrightarrow \rho = g(\theta) = \tan\theta\cdot\sec\theta$

平面区域的极坐标表示形式:

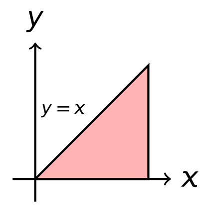
$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta, \phi_1(\theta) \le \rho \le \phi_2(\theta)\}$$

直角坐标区域表示形式转换为极坐标区域表示形式:

$$D = \{(x, y) \mid a \le x \le b,\ h(x) \le y \le g(x)\}$$

$$\xRightarrow{\text{转换}x,y} D = \{(\rho, \theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta,\ \phi_1(\theta) \le \rho \le \phi_2(\theta)\}$$

例 **10.** D 为由 $y=0$,$x=y$ 和 $x=1$ 围成的区域，使用极坐标表示该区域.



解. 显然区域 D 在直角坐标系下的表示为：

$$D=\{(x,y)|0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq x\}$$

由 $x=1$ 可得

$$\rho\cos\theta=1\Longrightarrow\rho=\frac{1}{\cos\theta}$$

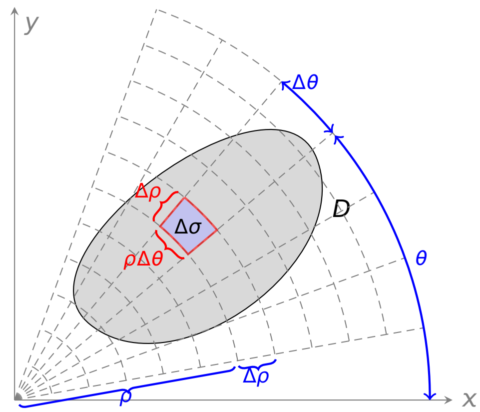
从而

$$D=\left\{(\rho,\theta)\middle|0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4},\ 0\leq\rho\leq\frac{1}{\cos\theta}\right\}.$$

如果积分区域是圆盘或者圆盘的一部分，用极坐标来计算更容易．此时

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$



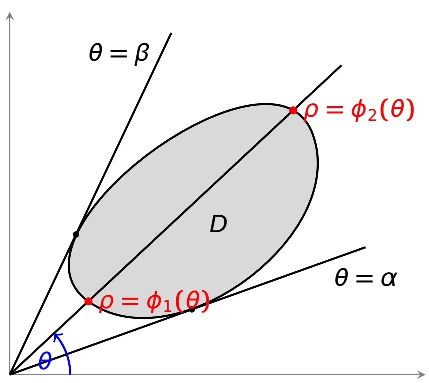
$$\Delta\sigma = ?? \approx \Delta\rho \cdot \rho\Delta\theta$$

$$\Rightarrow \Delta\sigma \approx \rho \cdot \Delta\rho \cdot \Delta\theta$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\sigma = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$\iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = ??$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[\int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\theta$$



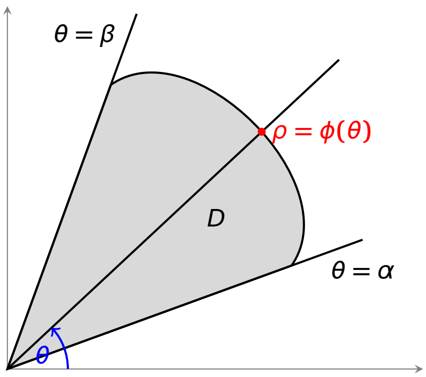
用极坐标表示积分区域

1. 先求 θ 的范围
2. 再求 ρ 的函数

$$D = \left\{(\rho, \theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta,\ \phi_1(\theta) \le \rho \le \phi_2(\theta)\right\}$$

$$\iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = ??$$

$= \int_{\alpha}^{\beta}\left[\int_{0}^{\phi(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\theta$



用极坐标表示积分区域

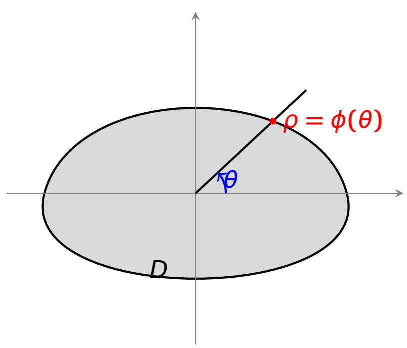
1. 先求 θ 的范围

2. 再求 ρ 的函数

$D = \{(\rho, \theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta,\ 0 \le \rho \le \phi(\theta)\}$

$\iint\limits_{D} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = ??$

$= \int_{0}^{2\pi}\left[\int_{0}^{\phi(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\theta$



用极坐标表示积分区域

1. 先求 θ 的范围

2. 再求 ρ 的函数

$D = \{(\rho, \theta) \mid 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le \phi(\theta)\}$

什么时候用极坐标计算二重积分？

1. 当区域是圆或圆的一部分, 或者区域 D 的边界方程用极坐标表示较简单时.

2. 被积函数是 $f(x^2+y^2)$, $f(\frac{x}{y})$ 或者 $f(\frac{y}{x})$ 等形式时.

1. 画出区域的草图;

2. 写出二重积分区域 D 在极坐标下的表示形式 (这是关键);

$$D=\{(r,\theta)\mid \alpha\le\theta\le\beta,\ \phi_1(\theta)\le r\le\phi_2(\theta)\}\,.$$

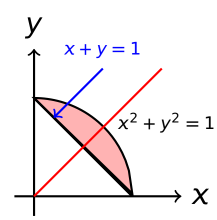
3. 把二重积分化为极坐标下的累次积分（先积 ρ 后积 θ）:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho.$$

4. 计算累次积分.

例 **11.** 写出积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的极坐标下的累次积分形式, 其中积分区域

$$D=\left\{(x,y)\mid 1-x\le y\le\sqrt{1-x^2},0\le x\le 1\right\}$$



解. 在极坐标系下 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 所以圆的方程为 $\rho=1$, 直线的方程为 $\rho=\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$, 因此

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$

例 **12.** 计算 $\iint_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是由中心在原点、半径为 a 的圆周围成的闭区域.

解. 在极坐标系中, 闭区域 D 可表示为

$$0\leqslant r\leqslant a,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

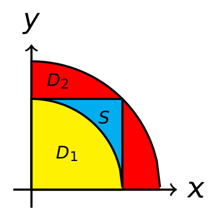
于是

$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \iint\limits_D e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^a e^{-r^2} r\,dr\right)d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a d\theta = \frac{1}{2}\left(1-e^{-a^2}\right)\int_0^{2\pi} d\theta$$
$$= \pi\left(1-e^{-a^2}\right)$$

例 **13.** 求广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

解. 设

$$D_1 = \left\{(x,y)\mid x^2+y^2 \leqslant R^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0\right\},$$
$$D_2 = \left\{(x,y)\mid x^2+y^2 \leqslant 2R^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0\right\},$$
$$S = \{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant R, 0\leqslant y\leqslant R\}.$$



显然 $D_1 \subset S \subset D_2$. 由于 $e^{-x^2-y^2} > 0$, 从而在这些闭区域上的二重积分之间有不等式

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy < \iint_S e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy < \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

因为

$$\iint_S e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^R e^{-x^2}\,dx \cdot \int_0^R e^{-y^2}\,dy = \left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\right)^2,$$

又应用上面已得的结果有

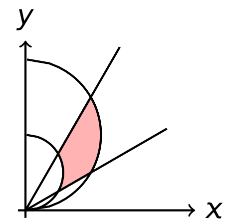
$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right),$$
$$\iint_{D_2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right),$$

于是上面的不等式可写成

$$\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right) < \left(\int_0^R e^{-x^2}\,dx\right)^2 < \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-2R^2}\right).$$

令 $R\to+\infty$, 上式两端趋于极限 $\frac{\pi}{4}$, 从而

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$



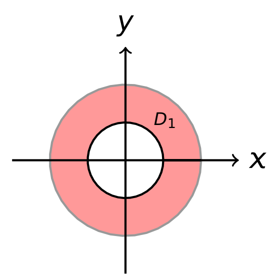
例 **14.** 计算 $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 为由圆 $x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=4y$ 及直线 $x-\sqrt{3}y=0$, $y-\sqrt{3}x=0$ 所围成的平面闭区域.

解**.** 由条件可得

$$y-\sqrt{3}x=0 \Rightarrow \theta_2=\frac{\pi}{3}, \quad x^2+y^2=4y \Rightarrow \rho=4\sin\theta,$$
$$x-\sqrt{3}y=0 \Rightarrow \theta_1=\frac{\pi}{6}, \quad x^2+y^2=2y \Rightarrow \rho=2\sin\theta.$$

于是

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}\rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho=15\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}\right).$$



例 **15.** 计算二重积分

$$\iint\limits_D \frac{\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中积分区域为

$$D=\left\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le 4\right\}.$$

解**.** 由对称性，可只考虑第一象限部分, $D=4D_1$ (注意：被积函数也要有对称性).

$$\iint\limits_D \frac{\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=4\iint_{D_1}\frac{\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_1^2\frac{\sin\pi r}{\rho}\rho\,\mathrm{d}\rho=-4.$$

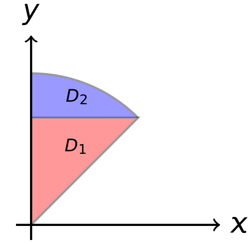
例 **16.** 将累次积分

$$\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^R\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

化为极坐标下的累次积分, 并计算.

解. 很明显 $D = D_1 \cup D_2$, 因此

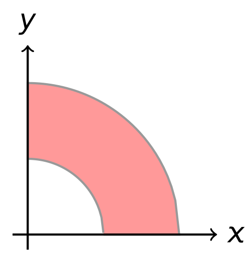
$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D e^{-\left(x^2+y^2\right)}\, dx\, dy = \iint\limits_D e^{-\rho^2} \rho\, d\rho\, d\theta \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^R e^{-\rho^2} \rho\, d\rho \\ &= \frac{\pi}{4}\left(-\frac{1}{2} e^{\rho^2}\right)\Big|_0^R = \frac{\pi}{8}\left(1 - e^{-R^2}\right) \end{aligned}$$



练习 2. 将直角坐标系下累次积分:

$$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$$

化为极坐标系下的累次积分.



答案. 区域如图所示, 易得

$$原式 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, d\rho$$

例 17. 求反常二重积分 $I = \iint_D \frac{d\sigma}{\left(1+x^2+y^2\right)^{\alpha}}$, 其中 $\alpha \neq 1, D$ 是整个 xOy 平面.

解. 先在圆域 $D' = \left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2\right\}$ 内考虑, 此时

$$\begin{aligned} I(R) = \iint_{D'} \frac{d\sigma}{(1+x^2+y^2)^{\alpha}} &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r}{(1+r^2)^{\alpha}} dr \\ &= \frac{\pi}{1-\alpha}\left[\frac{1}{(1+R^2)^{\alpha-1}} - 1\right]. \end{aligned}$$

- 当 $\alpha > 1$ 时, 因 $\lim\limits_{R\to+\infty} I(R) = \frac{\pi}{\alpha-1}$, 故原积分收敛, 且 $I = \frac{\pi}{\alpha-1}$.
- 当 $\alpha < 1$ 时, 因 $\lim\limits_{R\to+\infty} I(R) = \infty$, 所以原积分发散.

复习 1. 计算二重积分 $\iint\limits_D xy\, d\sigma$, 其中 D 是由 $x = 2$, $y = 1$ 与 $y = x$ 所围成的图形.

复习 **2.** 计算二重积分 $\iint\limits_D x\sqrt{y}\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $y=x^2$ 与 $y=\sqrt{x}$ 所围成的图形.