

第十一章 无穷级数

1. 以下四个关于级数的结论中, 正确的结论是 ().
- (A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 收敛.
(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n v_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛.
(C) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $u_n \geq \frac{1}{n}$.
(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且 $u_n \geq v_n (n = 1, 2, \dots)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也收敛.
2. 设 a 为常数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin a}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ ().
- (A) 绝对收敛 (B) 发散
(C) 条件收敛 (D) 收敛性取决于 a 的值
3. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 满足关系 $a_n \leq b_n$, 则 ().
- (A) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛 (B) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛
(C) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 (D) 当 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散
4. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是正项级数, 且 $u_n > v_n (n = 1, 2, \dots, 99)$, $u_n \leq v_n (n = 100, 101, \dots)$, 则下列命题正确的是 ().
- (A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 (B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散
(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 (D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散
5. 设 $0 < u_n < \frac{1}{n} (n = 1, 2, \dots)$, 则下列级数中一定收敛的是 ().
- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n}$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n^2$

6. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则下列级数中必定发散是 ().

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ (C) $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$

7. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ().

- (A) 一定收敛, 其和为零 (B) 一定收敛, 但和不一定为零
(C) 一定发散 (D) 可能收敛, 也可能发散

8. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n$ 的收敛域是 $(-4, 2]$, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-2)^n$ 的收敛区间是_____.

9. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{4}$, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛半径 $R =$ _____.

10. 实数 q 满足什么条件, 几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ 收敛, 即 q 满足_____.

11. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^n}$, $|x| < 2$ 的和函数是_____.

12. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} x^n$ 的收敛半径为_____.

13. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n \cdot n} (x-1)^n$ 的收敛域为_____.

14. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ 的和 $S =$ _____.

15. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ 的收敛域为_____.

16. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(1+n)}$ 敛散性, 若收敛, 指出其是绝对收敛还是条件收敛.

17. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n}$ 的收敛域及和函数.

18. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+2}$ 的和函数及收敛域.
19. 将函数 $f(x) = \frac{1}{5-x}$ 展开为 $(x-1)$ 的幂级数, 并求其收敛域.
20. (A班) 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开为 $(x-1)$ 的幂级数, 并求其收敛域.
21. 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \sin\left(n\pi + \frac{1}{\ln n}\right)$ 是绝对收敛, 条件收敛, 还是发散?
22. 求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} (x-1)^n$ 的收敛域.
23. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n+1}{n}$ 的敛散性.
24. 将函数 $f(x) = \ln x$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数.
25. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b}{a_n}\right)^n$ 的敛散性, 其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, (a > 0, b > 0)$.
26. 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+3}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数.
27. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{a^n} (a > 0)$ 是绝对收敛, 条件收敛, 还是发散.
28. 试求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ 的收敛域 I 与和函数 $S(x)$, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$ 的和.
29. [另附] 试求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ 的收敛域 I 与和函数 $S(x)$, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 的和.
30. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ 绝对收敛和条件收敛性.
31. 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数.

32. (A班) 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

33. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ 绝对收敛.

34. [另附] 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^2}$ 绝对收敛.