

## 第四章 中值定理及导数的应用

1. 当  $x \rightarrow 0$  时, 下列无穷小量

①  $\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}$       ②  $\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}$       ③  $x-\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\cos x\right)\sin x$

④  $e^{x^4-x}-1$  从低阶到高阶排列顺序为 ( ).

- (A) ①②③④      (B) ③①②④      (C) ④③②①      (D) ④②①③

2. 下列函数在给定区间上满足罗尔定理条件的是 ( ).

(A)  $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & 0 < x \leq 2 \\ e, & x = 0 \end{cases}, [0, 2]$       (B)  $f(x) = x^2 - 2x - 3, [-1, 3]$

(C)  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^4}, [0, 2]$       (D)  $f(x) = |x|, [-1, 1]$

3. 设函数  $f(x)$  满足关系式  $f''(x) + [f'(x)]^2 = -e^x$ , 且  $f'(0) = 0$ , 则 ( ).

(A)  $f(0)$  是  $f(x)$  的极大值

(B)  $f(0)$  是  $f(x)$  的极小值

(C) 点  $(0, f(0))$  是曲线  $y = f(x)$  的拐点

(D)  $f(0)$  不是  $f(x)$  的极值, 点  $(0, f(0))$  也不是曲线  $y = f(x)$  的拐点

4. 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的  $\delta$  邻域  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  ( $\delta > 0$ ) 内三阶导数  $f'''(x) > 0$ , 且二阶导数值  $f''(x_0) = 0$ , 则曲线  $y = f(x)$  ( ).

(A) 在  $(x_0 - \delta, x_0)$  内是凹弧, 在  $(x_0, x_0 + \delta)$  内是凸弧

(B) 在  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  内是凸弧

(C) 在  $(x_0 - \delta, x_0)$  内是凸弧, 在  $(x_0, x_0 + \delta)$  内是凹弧

(D) 在  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  内是凹弧

5. 函数  $f(x) = \arctan x + \operatorname{arccot} x =$  ( ).

(A) 0

(B)  $2x$

(C)  $\frac{\pi}{2}$

(D)  $\pi$

6. 曲线  $y = e^{-\frac{1}{x}}$ , 则下列说法正确的是 ( ).
- (A) 在  $(-\infty, 0), (0, +\infty)$  内单调减少 (B) 没有极值  
 (C) 在  $(-\infty, \frac{1}{2})$  内图形是下凹的 (D) 没有拐点
7. 函数  $y = f(x)$  在点  $x = x_0$  处连续且取得极小值, 则  $f(x)$  在  $x_0$  处必有 ( ).
- (A)  $f'(x_0) = 0$  (B)  $f''(x_0) > 0$   
 (C)  $f'(x_0) = 0$  且  $f''(x_0) > 0$  (D)  $f'(x_0) = 0$  或不存在
8. 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有定义, 在开区间  $(a, b)$  内可导, 则 ( ).
- (A) 当  $f(a)f(b) < 0$  时, 存在  $x_0 \in (a, b)$ , 使得  $f(x_0) = 0$   
 (B) 对任何  $x_0 \in (a, b)$ , 有  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$   
 (C) 当  $f(a) = f(b)$  时, 存在  $x_0 \in (a, b)$ , 使得  $f'(x_0) = 0$   
 (D) 存在  $x_0 \in (a, b)$ , 使得  $f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a)$
9. 函数  $y = x^3 + 12x + 1$  在定义域内 ( ).
- (A) 图形是凸的 (B) 图形是凹的 (C) 单调减少 (D) 单调增加
10. 下列函数在给定的区间上满足罗尔定理条件的是 ( ).
- (A)  $f(x) = x^2 - 5x + 6, [2, 3]$  (B)  $f(x) = \sin x, \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$   
 (C)  $f(x) = \sqrt{x^2}e^{x^2}, [-1, 1]$  (D)  $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 5, \\ 1, & x \geq 5, \end{cases} [0, 5]$
11. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $x - \sin x$  是比  $x^2$  的 ( ).
- (A) 低阶无穷小 (B) 高阶无穷小  
 (C) 等价无穷小 (D) 同阶但非等价无穷小
12. 下列函数在给定区间上满足罗尔定理条件的是 ( ).
- (A)  $f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & 0 < x \leq 2 \\ e, & x = 0 \end{cases}$  (B)  $f(x) = |x|, [-1, 1]$   
 (C)  $f(x) = \frac{1}{(x-1)^4}, [0, 2]$  (D)  $f(x) = x^2 - 2x - 3, [-1, 3]$
13. 若  $(0, 1)$  是曲线  $y = x^3 + (b-1)x^2 + c$  的拐点, 则有 ( ).
- (A)  $b = 1, c = 1$  (B)  $b = -1, c = -1$  (C)  $b = 1, c = -1$  (D)  $b = -1, c = 1$

14. 下列函数在给定的区间上满足罗尔定理的是 ( ).

(A)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}, [0, 2]$

(B)  $f(x) = \sin x, \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$

(C)  $f(x) = xe^x [0, 1]$

(D)  $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 5 \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}, [0, 5]$

15. 设  $f'(0) = 2$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\frac{1}{2}x)}{x} =$  \_\_\_\_\_.

16. 函数  $y = x - \ln(1+x)$  在区间 \_\_\_\_\_ 内单调减少.

17. 已知点  $(1, 1)$  是曲线  $y = x^2 + a \ln x$  的拐点, 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

18. 设  $f'(0) = 1$ , 则  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(-h)}{h} =$  \_\_\_\_\_.

19. 设  $f(x) = \ln \sin x, x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ , 则满足罗尔中值定理中的数值  $\xi =$  \_\_\_\_\_.

20. 函数  $y = x^2 - \frac{16}{x} (x < 0)$  的最小值是 \_\_\_\_\_.

21. 函数  $f(x) = x \ln x$  的单调递减区间是 \_\_\_\_\_.

22. 函数  $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$  在区间  $[-10, 10]$  上的最大值为 \_\_\_\_\_.

23. 函数  $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x$  的极大值是 \_\_\_\_\_.

24. 函数  $y = x^2 - \frac{54}{x}$  在区间  $(-\infty, 0)$  上的最小值是 \_\_\_\_\_.

25. 设函数  $f(x) = x(x-1)(x-2)$ , 则方程  $f'(x) = 0$  的实根个数为 \_\_\_\_\_.

26. 函数  $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x$  在区间  $[-2, 2]$  上的最大值是 \_\_\_\_\_.

27. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} (3e^{\frac{x}{x-1}} - 2)^{\frac{1}{x}}$ .

28. 求函数  $f(x) = xe^x - e^x + 1$  的单调区间与极值及凹凸区间与拐点.

29. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$ .

30. 把一根长度为  $a$  的铁丝截成两段, 其中一段折成正方形框架, 另一段弯成圆周问当如何截取时, 可使围成的正方形和圆的面积之和达到最小?

31. 设  $y = y(x)$  是由方程  $y^2 + xy + x^2 + x = 0$  所确定的满足  $y(-1) = 1$  的隐函数, 求  $y'(-1)$  及  $y''(-1)$ , 并计算极限  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{y(x) - 1}{(x + 1)^2}$ .

32. (A 班) 计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{2}{\sin x}}$ .

计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\ln(1+x)}{x^2} - \frac{1}{x} \right)$ .

33. 求  $y = (x-1)e^{\frac{\pi}{3} + \arctan x}$  的单调区间和极值.

34. 求  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x^2)^{\frac{1}{1 - \cos x}}$ .

35. 一房地产公司有 50 套公寓要出租, 当月租金定为 1000 元时, 公寓会全部租出去, 当月租金每增加 50 元时, 就会多一套公寓租不出去, 而租出去的公寓每月需花费 100 元的维修费. 问房租金定为多少时可获得最大收入?

(A 班) 需求函数为  $p = 10 - \frac{Q}{5}$ ,

(1) 求当  $Q = 20$  时的边际收益, 并说明其经济意义;

(2) 求当  $p = 6$  时的收益弹性, 并说明其经济意义.

36. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{3x}}$ .

37. 求曲线  $y = xe^{-x}$  的凹凸区间与拐点.

38. (1) 求函数  $y = f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$  的单调区间与极值;

(2) 设  $a$  为实数, 试讨论方程  $f(x) = a$  的不同实数解的个数.

39. 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{2}{\ln(1+3x)}}$ .

40. 求曲线  $y = x^4 - 2x^3 + 1$  的凹凸区间及拐点.

41. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ .

42. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ .

43. 问  $a, b$  为何值时, 点  $A(1,3)$  是曲线  $y = ax^3 + bx^2 + 1$  的拐点?

44. 某商场每年销售商品  $a$  件, 分为  $x$  批采购进货. 已知每批采购费用为  $b$  元, 而未销售商品的库存费用为  $c$  元/件·年. 设销售商品是均匀的, 问分多少批进货时, 才能使以上两种费用的总和为最省?

45. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 \arcsin x}$ .

46. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$

47. 某企业生产某种产品, 固定成本 20000 元, 每生产一单位产品, 成本增加 100 元. 已知总收益  $R$  是年产量  $Q$  的函数, 即

$$R = R(Q) = \begin{cases} 400Q - \frac{1}{2}Q^2, & 0 \leq Q \leq 400 \\ 80000, & Q > 400 \end{cases}$$

问每年生产多少产品时, 总利润最大? 最大利润是多少?

48. 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$ .

49. 求曲线  $y = xe^{-x}$  的出凸区间及拐点.

50. 某企业生产产品  $x$  件时, 总成本函数为  $C(x) = ax^2 + bx + c$ , 总收益函数为  $R(x) = px^2 + qx$ , 其中  $a, b, c, p, q > 0, a > p, b < q$ . 当企业按最大利润投产时, 对每件产品征收税额为多少才能使总税额最大?

51. 若  $0 < a < 1$ , 则对于  $x > 0$ , 证明  $x^a - ax \leq 1 - a$ .

52. 当  $0 < a < b < 1$  时, 证明不等式  $\frac{b-a}{\sqrt{1-a^2}} < \arcsin b - \arcsin a < \frac{b-a}{\sqrt{1-b^2}}$ .

53. (A 班) 设函数  $f(x)$  在  $[0, \pi]$  上连续, 在  $(0, \pi)$  内可导, 证明: 至少存在一点  $\xi \in (0, \pi)$ , 使得  $f'(\xi) = -f(\xi) \cot \xi$ .

设函数  $f(x)$  在  $[0, \pi]$  上连续, 在  $(0, \pi)$  内可导, 且  $f(0) = f(\pi) = 0$ . 证明: 至少存在一点  $\xi \in (0, \pi)$ , 使得  $f'(\xi) = -f(\xi)$ .

54. 证明: 当  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  时,  $\tan x > x + \frac{1}{3}x^3$ .

(A 班) 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可微, 且  $f(a) = f(b) = 0$ , 试证明: 在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使  $f'(\xi) = 3f(\xi)$ .

55. 已知  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 且  $f(1) = 0$ , 证明在区间  $(0, 1)$  内至少有一点  $c$ , 使得  $f'(c) = -\frac{f(c)}{c}$ .
56. 若函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内满足关系式  $f'(x) = f(x)$ , 且  $f(0) = 1$ , 则  $f(x) = e^x$ .
57. 证明: 当  $x > 0$  时,  $(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$ .
58. 设函数  $f(x)$  在  $[0, 2]$  上连续, 在  $(0, 2)$  内可导, 且  $f(2) = 4$ . 试证存在一点  $\xi \in (0, 2)$ , 使得  $2\xi f(\xi) + \xi^2 f'(\xi) = 8$ .