第八章　多元函数微分学

1. 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面四条性质:

①$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续;

②$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数都连续;

③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微;

④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数都存在.

若用"$P \Longrightarrow Q$" 表示性质 P 推出性质 Q, 则有 (　　)

(A) ③ $\Longrightarrow$ ② $\Longrightarrow$ ①　　**(B)** ③ $\Longrightarrow$ ④ $\Longrightarrow$ ①

(C) ③ $\Longrightarrow$ ① $\Longrightarrow$ ④　　**(D)** ② $\Longrightarrow$ ③ $\Longrightarrow$ ①

2. 二元函数 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极大值点是 (　　).

(A) $(1,0)$　　**(B)** $(-3,2)$　　**(C)** $(-3,0)$　　**(D)** $(1,2)$

3. 设 $z=\sin(xy)$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ (　　).

(A) $y\sin(xy)$　　**(B)** $-y\sin(xy)$　　**(C)** $y\cos(xy)$　　**(D)** $-y\cos(xy)$

4. 如果 $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$, 则二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处 (　　).

(A) 一定连续　　**(B)** 一定偏导数存在

(C) 一定可微　　**(D)** 一定有极值

5. 设 $z=xe^{xy}$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 等于 (　　).

(A) xye^{xy}　　**(B)** e^{xy}　　**(C)** x^2e^{xy}　　**(D)** $(1+xy)e^{xy}$

6. 设 $z=\arctan\dfrac{y}{x}$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 等于 (　　).

(A) $-\dfrac{y}{x^2+y^2}$　　**(B)** $\dfrac{y}{x^2+y^2}$　　**(C)** $\dfrac{x}{x^2+y^2}$　　**(D)** $-\dfrac{x}{x^2+y^2}$

7. 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续是 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 偏导数存在的 (　　).

(A) 充分条件　　**(B)** 必要条件　　**(C)** 充要条件　　**(D)** 无关条件

8. 函数 $f(x,y)=x^2-y^2$ 在其定义域上（　）.

(A) 有极大值无极小值　　(B) 无极大值有极小值

(C) 有极大值有极小值　　(D) 无极大值无极小值

9. [另附] 函数 $f(x,y)=xy$ 在其定义域上（　）.

(A) 有极大值无极小值　　(B) 无极大值有极小值

(C) 有极大值有极小值　　(D) 无极大值无极小值

10. 设 $z=\sqrt{\ln(xy)}$, 则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 等于（　）.

(A) $\dfrac{1}{x\sqrt{\ln(xy)}}$　(B) $\dfrac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}}$　(C) $\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}$　(D) $\dfrac{1}{2\sqrt{\ln(xy)}}$

11. 设 $z=x^2e^y+y^2\sin x$, 则 $dz|_{(\pi,0)}=$__________.

12. 设二元函数 $z=\displaystyle\int_1^{xy}\ln t\,dt$, 则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$__________.

13. 设 $f(x,y)=\dfrac{x}{y^2}$, 则 $df(x,y)|_{x=1,y=1}=$__________.

14. 设 $z=f(3x-2y,xy)$, 且 $f(u,v)$ 可微，则全微分 $dz=$__________.

15. 设 $z=f(x\ln y,y-x)$, 且 f 具有一阶连续偏导数, 则全微分 $dz=$__________.

16. 已知函数 $z=\ln\left(1+x^2-y^2\right)$, 则 $dz|_{(1,1)}=$__________.

17. 函数 $z=x^2y+\dfrac{x}{y}$ 的全微分 $dz=$__________.

18. 设函数 $z=e^x\sin y$, 则 $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2=$__________.

19. 函数 $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$ 的定义域是__________.

20. 求二元函数 $z=3x^2-4xy+5y^2-2x-6y+1$ 的极值.

21. 设 $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

22. 设函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $e^z=xyz$ 所确定，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

23. 求二元函数 $f(x,y)=xy$ 在附加条件 $x+y=1$ 下的极大值.

24. 设函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $e^z=x^3y^2+z$ 所确定, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

25. 设二元函数 $f(x,y)=3x+4y-ax^2-2ay^2-2bxy$, 试讨论参数 a,b 满足什么条件时, $f(x,y)$ 有唯一极大值, 或有唯一极小值.

26. 已知 f 具有二阶连续偏导数, 且 $z=f\left(x^2-y^2, xy\right)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

27. 设 $x^3+y-xyz^5=0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

28. 已知直角三角形斜边长为 l, 试求两条直角边等于何值时, 直角三角形的周长最大?

29. 已知 f 具有二阶连续偏导数, 且 $z=f(xy, \frac{y}{x})$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

30. 设函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2-4z=0$ 所确定, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

31. 求抛物线 $y=x^2$ 和直线 $x-y-2=0$ 之间的最短距离.

32. 设 $z=\arctan(xy)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

33. [另附] 设 $z=\arctan(\frac{y}{x})$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

34. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $\frac{y}{z}=\ln\frac{z}{x}$ 所确定, 求 dz.

35. 已知求函数 $z=\ln(y+\sqrt{x^2+y^2})$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

36. 设二元函数 $F(x,y)$ 在 $\left(x_0,y_0\right)$ 某邻域内具有二阶连续的偏导数，且

$$F\left(x_0,y_0\right)=0,\ F_x\left(x_0,y_0\right)=0,\ F_{xx}\left(x_0,y_0\right)\cdot F_y\left(x_0,y_0\right)\neq 0.$$

证明**:** 由方程 $F(x,y)=0$ 在 $\left(x_0,y_0\right)$ 某邻域内确定的隐函数 $y=y(x)$ 在点 $x=x_0$ 处取得极值**.**

37. 设 $z=f[x+\varphi(y)]$, 其中 f 二次可导**,** φ 可导**,** 证明 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

38. 设 $y=f(x,t)$**,** 而 t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 x**,** y 的函数**,** 其中 f**,** F 都具有一阶连续偏导数**,** 试证

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}}.$$