第九章　二重积分

1. 设 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$, 则极坐标系 (r,θ) 中的累次积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\mathrm{d}r$$

可化为直角坐标系 (x,y) 中的累次积分（　）

(A) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$　　**(B)** $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y$

(C) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$　　**(D)** $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y$

2. 二次积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$ 可以写成（　）.

(A) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$　　**(B)** $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

(C) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1f(x,y)\mathrm{d}y$　　**(D)** $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$

3. 设函数 $f(x,y)$ 为连续函数, 二次积分 $\int_0^2\mathrm{d}x\int_x^2f(x,y)\mathrm{d}y$ 交换积分次序后等于（　）.

(A) $\displaystyle\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{y}f(x,y)\mathrm{d}x$　　**(B)** $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{y}f(x,y)\mathrm{d}x$

(C) $\displaystyle\int_0^2\mathrm{d}x\int_y^{2}f(x,y)\mathrm{d}y$　　**(D)** $\displaystyle\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{2}f(x,y)\mathrm{d}x$

4. 设函数 $f(x,y)$ 为连续函数, 二次积分 $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y}f\left(x,y\right)\mathrm{d}x$ 交换积分次序后等于（　）.

(A) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}f\left(x,y\right)\mathrm{d}y$　　**(B)** $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x}^{\sqrt{x}}f\left(x,y\right)\mathrm{d}y$

(C) $\int_{0}^{1} \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y$ (D) $\int_{0}^{1} \mathrm{d}x \int_{x}^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$

5. 设 $f(x,y)$ 为连续函数,二次积分 $\int_{0}^{1} \mathrm{d}y \int_{y}^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x$ 交换积分次序后等于 ( )

(A) $\int_{0}^{1} \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y$ (B) $\int_{0}^{1} \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y$

(C) $\int_{0}^{1} \mathrm{d}x \int_{x}^{\sqrt{x}} f(x,y)\mathrm{d}y$ (D) $\int_{0}^{1} \mathrm{d}x \int_{x}^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$

6. 交换二次积分 $\int_{-1}^{0} \mathrm{d}x \int_{0}^{1+x} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_{0}^{1} \mathrm{d}x \int_{0}^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y =$ __________.

7. 设区域 $D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4, y\ge 0\}$, 则 $\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$ __________.

8. 若 D 是由 $|x|\le 1, |y|\le 1$ 围成的正方形区域,则 $\iint_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$ __________.

9. 二重积分 $\iint_{x^2+y^2\le 1} \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$ __________.

10. 已知 $f(x,y)=xy+2\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$, 且 $f(x,y)$ 连续, 则 $f(x,y)=$ __________.

11. 二重积分 $\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(\arctan\frac{y}{x})\mathrm{d}y$ 在极坐标系中表示为__________.

12. 已知 $\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$, 则 $\iint_D f(x)f(y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$ __________, 其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

13. 计算二重积分 $\iint_D \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 是由 $x=\sqrt{y}$, $x=0$ 与 $y=1$ 所围成的区域.

14. 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)\,|\,x\le x^2+y^2\le 1, y\ge 0\}$.

15. 计算二重积分 $\iint_D xy\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是由直线 $y=2, y=x, y=2x$ 所围成的面积.

16. 计算二重积分 $\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{4-(x^2+y^2)}}$, 其中 $D=\left\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 2\right\}$.

17. 计算二重积分 $\iint_D y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ， 其中区域 D 由直线 $y=x, x=0, y=1$ 围成.

18. 计算二重积分 $\iint_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 为环形域 $\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2$.

19. 计算二重积分 $\iint_D \left(x^2+y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 由曲线 $y=x^2$ 与 $x=y^2$ 围成.

20. 计算二重积分 $\iint_D \ln\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 为环形域 $1\le x^2+y^2\le \mathrm{e}^2$.

21. 计算二重积分 $\iint_D \frac{y}{1+x^6}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)|0\le y\le x, 0\le x\le 1\}$.

22. 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1, 0\le y\le x\}$.

23. 计算二重积分 $\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 为环形域 $\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2$.